

30233

X

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

HUSZADIK ÉVFOLYAM

I. FÜZET

1911

JANUÁR

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1911.



TARTALOM.

	Lap
A Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-jutalma	1
A nemzetközi Bolyai-bizottság 1910. évi ülésének jegyzőkönyve	2
HENRI POINCARÉ jelentése	3
WODETZKY JÓZSEF: A Hold-mozgás variációja (Első közlemény.)	40

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24–30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszadik társulati év 1911 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, sziveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiunmi tanár (VI., Nagy János-utca 37.) címére beküldeni. A *mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sűrűn kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6–6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első és harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy matematikai és egy physikai tárgy — 2–3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár címére **VIII., Sándor-utca 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (ezikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a matematikai tárgyuak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyuak pedig *Kövesligethy R.* címe alatt. A reclamatiók, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

A reclamatiók, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZADIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ és RADOS GUSZTÁV



BUDAPEST 1911

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT



50255

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZADIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

A Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-jutalma 1; A nemzetközi Bolyai-bizottság 1910. évi ülésének jegyzőkönyve 2; HENRI POINCARÉ jelentése 3; WODETZKY JÓZSEF: A Hold-mozgás variációja (Első közlemény) 40.

Második—Harmadik füzet.

GROSSCHMID LAJOS: A négyzetes binom-kongruenciák gyökeiről 47; DIENES VALÉRIA és DIENES PÁL: Analytikai függvények algebrai és logaritmikus szingularitásairól (Első közlemény) 73; DÁVID LAJOS: A medium arithmetico-geometricumról 98; WODETZKY JÓZSEF: A Hold-mozgás variációja (Második és befejező közlemény) 106; RYBÁR ISTVÁN: A lanthán és a kobalt spektrálvonalainak Zeeman-effektusáról (Első közlemény) 128.

Negyedik—Ötödik füzet.

KLUG LIPÓT: A másodrendű felület- és a tetraederből lezármaztatható hiperboloidikus fekvésű egyenesekről 157; BÁRÓ HARKÁNYI BÉLA: A forgási ellipsoid meridiánhosszának minimumáról állandó térfogat mellett 163; DIENES VALÉRIA és DIENES PÁL: Analytikai függvények algebrai és logaritmikus szingularitásairól (Második közlemény) 169; RYBÁR ISTVÁN: A lanthán és a kobalt spektrálvonalainak Zeeman-effektusáról (Második és befejező közlemény) 198; *Irodalom*: JAEGER IMRE: Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn 249.

Hatodik—Hetedik—Nyolczadik füzet.

GEŐCZE ZOÁRD: A területmérésről (Első közlemény) 255; TERLANDAY EMIL: A kettőstörés utánzása üveglemezekkel (Második közlemény) 302; ZEMPLÉN GYÖZŐ: A relativitás elvéről 331; LAKITS FERENCZ: Az üstökösök pályája 348; UJJ GYULA: Lencserendszerek fókuszjainak és főfelületeinek kísérleti meghatározásáról 357; A Matematikai és Fizikai Társulat tizen-nyolczadik rendes közgyűlése 380; A Matematikai és Fizikai Társulat XVIII. tanulóversenye 387; A Matematikai és Fizikai Társulat XVIII. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok: I. Hlucsil Károly dolgozata 389; II. Klein Gábor dolgozata 392.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Önálló és ismertető czikkek.

A Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-jutalma	1
A nemzetközi Bolyai-bizottság 1910. évi ülésének jegyzőkönyve	2
DÁVID LAJOS: A medium arithmetico-geometricumról	98
DIENES VALÉRIA és DIENES PÁL: Analytikai függvények algebrai és logaritmikus szingularitásairól (Első közlemény)	73
— Analytikai függvények algebrai és logaritmusos szingularitásairól (Második közlemény)	169
GEÖCZE ZOÁRD: A területmérésről (Első közlemény).....	255
GROSSCHMID LAJOS: A négyzetes binom-kongruenciák gyökeiről	47
br. HARKÁNYI BÉLA: A forgási ellipsoid meridiánhosszának minimumáról állandó térfogat mellett.....	163
KLUG LIPÓT: A másodrendű felület- és a tetraederből lezármasztatható hiperboloidikus fekvésű egyenesekről	157
LAKITS FERENCZ: Az üstökösök pályája	348
POINCARÉ HENRI jelentése a Bolyai-jutalomról	3
RYBÁR ISTVÁN: A lanthán és a kobalt spektrálvonalainak Zeeman-effektusáról (Első közlemény)	128
— A lanthán és a kobalt spektrálvonalainak Zeeman-effektusáról (Második és befejező közlemény)	198
TERLANDAY EMIL: A kettőstörés utánzása üveglemezekkel (Második közlemény)	302
UJJ GYULA: Lencserendszerek fókuszainak és fókuszterületeinek kísérleti meghatározásáról	357
WODETZKY JÓZSEF: A Hold-mozgás variációja (Első közlemény)	40
— A Hold-mozgás variációja (Második és befejező közlemény)	106
ZEMPLÉN GYÖZÖ: A relativitás elvéről	331

Irodalom.

JAEGER IMRE: Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn	249
--	-----

Társulati ügyek.

A Matematikai és Fizikai Társulat tizennyolczadik rendes közgyűlése	380
A Matematikai és Fizikai Társulat XVIII. tanulóversenyé	387
A Matematikai és Fizikai Társulat XVIII. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok: I. Hlucsil Károly dolgozata	389
— II. Klein Gábor dolgozata.....	392

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA BOLYAI-JUTALMA.

A magyar tudományos Akadémia öt év előtt adta ki először a 10,000 koronás Bolyai-jutalmát, melynek létesítésével, hazánknak a matematika terén eleddig legfényesebb kutatóinak, a geniális Bolyaiknak emlékezetét méltó módon kívánta megörökíteni. E jutalom első laureatusa HENRI POINCARÉ volt, a francziáknak legkiválóbb tudósa, kinek a matematika, elméleti physika és a csillagászat terén korszakot alkotó művei minden idők legfényesebb alkotásai közé tartoznak.

Az Akadémia Bolyai-bizottságának akkori döntése, melyről e folyóiratban is hírt adtunk, világszerte nagy tetszéssel találkozott. Mert eltekintve attól a reánk nézve örvendetes eseménytől, hogy a francia akadémia elnöke nyílt ülésén tartott fényes beszédében POINCARÉ-val együtt akadémiainkat is üdvözölte és a hallhatatlan Bolyaiak hervadhatatlan nagy érdemeit újból kiemelve, azoknak emlékezetét a legmelegebb hangon dicsőítette, még ezenfelül lehet mondani széles e világon, a hol csak a tudomány iránt érdeklődnek, a legelőkelőbb szakfolyóiratok siettek a Bolyai-jutalomról szóló jelentést közzétenni. Így ez a jelentés teljes terjedelmében megjelent Franciaországban a «Bulletin des Sciences Mathématiques» című folyóiratban, Németországban a «Mathematische Annalen», Olaszországban a «Rendi conti di Palermo» című legelőkelőbb olasz matematikai folyóirat hozták e jelentést teljes terjedelmében, az amerikai «Science» pedig bő kivonatban, angol nyelven.

Nem érdek nélkül való, hogy ERNEST LEBON «Henri Poincaré,

Biographie, Bibliographie analytique des écrits» című művében Poincaré tudományos méltatására a magyar tud. Akadémia Bolyai-jutalmáról szóló jelentését használta fel, a melyet művébe szóhíven átvett.

Az alábbiakban bemutatjuk t. olvasóinknak a magy. tud. Akadémia Bolyai-bizottságának 1910 október havában folytatott tárgyalásairól szóló jegyzőkönyvét és a bizottság előadójának, HENRI POINCARÉ-nak érdekes jelentését. A Bolyai-bizottság ez idei tárgyalásainak eredményeként a tud. Akadémiának azt javasolta, hogy a Bolyai-jutalmat DAVID HILBERT hírneves német matematikusnak ítélje oda, a ki már eddigi munkálkodásával is a matematika fejlődése körül hervadhatatlan érdemeket szerzett. Az Akadémia a bizottság javaslatát az 1910. évi deczember havi összes ülésén egyhangú határozattal magáévá tette. Hiszszük és reméljük, hogy Akadémiánknak ez a döntése is a tudósvilág tetszésével fog találkozni.

A NEMZETKÖZI BOLYAI-BIZOTTSÁG 1910. ÉVI ÜLÉSÉNEK JEGYZŐKÖNYVE.

Bolyai János születése századik évfordulójának ünnepléséhez a M. Tud. Akadémia 1900-ban azon határozatával járult hozzá, hogy a halhatatlan tudósnak, valamint az ő mélyen gondolkodó atyjának és a tudományban mesterének emlékeztére, első ízben 1905-ben és azután minden ötödik évben a deczemberi összes ülésén, a megelőző öt évben bárhol és bármely nyelven megírt legkiválóbb matematikai vizsgálat szerzőjét, tekintetbe véve az illetőnek előbbi tudományos működését is, 10,000 K «Bolyai-jutalom»-mal és éremmel tünteti ki. Az érem egyik oldalát a M. Tud. Akadémia és Budapest képe, a másik oldalát magyar felirat díszíti.

Az alapítvány szabályzata értelmében a M. Tud. Akadémia az 1905—1910. időszakra KÖNIG GYULÁ-t, a III. osztály titkárát és RADOS GUSZTÁV-ot, ugyanennek az osztálynak rendes tagját,

mint az Akadémia belső tagjait, HENRI POINCARÉ-t, a francia Akadémia tagját és GÖSTA MITTAG-LEFFLER-t, a svéd tud. Akadémia tagját mint külső tagjait küldötte ki a *Bolyai*-jutalmat odaitéló bizottságba. E bizottság 1910. évi október hó 17-én Budapesten gyűlt össze és 17-én és 18-án folytatott szóbeli tárgyalásaira elnökül KÖNIG GYULÁ-t, előadóul pedig HENRI POINCARÉ-t választotta meg.

Az utolsó öt évben megjelent legkiválóbb matematikai tiublicatiók közül a bizottság különösen DAVID HILBERT műveit méltatta figyelmére, a melyek gondolati tartalmuk mélysége, módszereik eredetisége, bebizonyításaik logikai szigorúsága révén már eddig is igen nagy befolyást gyakoroltak a matematika fejlődésére.

Birálat alá véve e kiváló szerző jogcímeit és figyelembe véve az utolsó öt évben megjelent munkáin kívül az előző munkáit is, valamint az egész tudományos pályafutását, a bizottság egyhangulag úgy határozott, hogy a Magyar Tud. Akadémia Bolyai-jutalmát DAVID HILBERT-nek javasolja odaitélni.

Ez elhatározás indokolását H. POINCARÉ előadó jelentésében fogja előadni.

E jegyzőkönyvet egyhangulag elfogadták.

Budapest, 1910 október 18-án.

König Gyula, elnök.

Poincaré, előadó.

Mittag-Leffler,

Rados Gusztáv.

HENRI POINCARÉ JELENTÉSE.

A HILBERT-től tárgyalt problémák annyira változatosak, fontosságuk pedig olyan szembeszökő, hogy hosszas bevezetéstől eltekinthetnek. Azért előnyösnek látszik mindjárt belefogni főbb értekezéseinek részletes ismertetésébe. Az olvasó e kutatások nagyjelentőségű eredményeinek láttára a végső consequentiát amúgy is maga fogja levonhatni.

Az invariantsok.

HILBERT első dolgozatai az invariantsok elméletére vonatkoznak. Ismeretes, hogy mily szenvedélylyel művelték a matematikának ezt az ágát a múlt század közepe táján valamint az is, hogy e szenvedély azóta mennyire alább szállt. Úgy látszott, hogy a CLEBSCH-ék, GORDAN-ék, CAYLEY-ék és SYLVESTER-ék ki-merítették már mindazt, a mit a régi módszerekkel elérni lehetett és hogy utánuk már csak kevés tarlózni való maradt hátra. Azonban az algebra és számelmélet, különösen pedig az algebrai egész számok elméletének haladásai, valamint ez utóbbi módszereinek kiterjesztése egész formákra, KRONECKER tmodulus-elmélete, megengedték az idevágó kérdések tárgyalása új, eladdig kifürkészetlen oldalról. Ezt tette HILBERT, midőn mindenekelőtt GORDAN-nak híres tételével próbálkozott meg, a mely szerint valamely alakrendszer összes invariantsai rationalis és egész módon fejezhetők ki közülök alkalmasan választott véges számú invariants segítségével. A HILBERT-től elért siker-ről magunknak jobb képet nem alkothatunk, mintha GORDAN-nak egész kötetet kitöltő bebizonyítását összehasonlítjuk azzal a néhány sorral, a melylyel HILBERT a bebizonyításában cél-hoz jutott. A módszerek HILBERT révén ugyanannyit nyertek általánosságukban, mint egyöntetűségükben és a lehetséges általánosításoknak egész sorozata volt előrelátható.

Tekintsük az F alakoknak végtelen sorozatát, akkor közülök mindig kiválasztható az F_1, F_2, \dots, F_p alakok véges rendszere, a melynek segítségével az F sorozat bármely alakja ekként fejezhető ki:

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_p F_p, \quad (1)$$

a hol az A együttthatók ugyanazoktól a változóktól függő alakok, mint az F -ek. E tétel a modulusok KRONECKER-től bevezetett alapvető elméletének folyománya. E tétel KRONECKER nyel-vén szólva annyit mond, hogy több modulus közös divisorai, legyenek ezek bár végtelen nagy számban is, közülök egyik-

nek — a legnagyobb közös divisornak — osztói. A geometria nyelvén ezt úgy fejezhetjük ki (ha négy változóra szorítkozunk s ezeket mint homogén térbeli koordinátákat értelmezzük), hogy végtelen sok algebrai felület közös pontjai véges számú algebrai görbe pontjai, a melyekhez véges számú izolált pont járúl.

De ezzel még nincsen vége. Tegyük fel, hogy az F -ek mindannyian bizonyos alakrendszer invariánsai és az A -k ez alakrendszer együttthatóinak alakjai. Mindig feltehető, hogy az A -k is invariánsok. Mert különben az alakrendszer alakjaira oly lineár átalakítás volna alkalmazható, a melynek együttthatói határozatlanok. Ezek a határozatlanok belépnének az 1. alatti relatio transformált kifejezésébe. Ha most erre bizonyos differentiálási folyamatot ismételten alkalmazunk (e differentiálási folyamat a lineár átalakítás határozatlan együttthatóira vonatkozik), végül az 1. relatióval analog relatióhoz jutunk, a melyben az A együttthatók helyébe invariánsok léptek. GORDAN tételének beh bizonyítása innen közvetlenül foly.

De ez sem még minden; az alapvariansok között bizonyos számú syzigiáknak nevezett relatio áll fenn. Az összes syzigiák néhányukból összeadással és szorzással vezethetők le. E syzigiák között vannak elsőfokúak, másodfokúak stb., ezek mindegyik fajtája ugyanazon fokhoz tartozó véges számú syzigiából egész műveletekkel vezethető le.

HILBERT ezeket az eredményeket az algebrának egy általános tételéből vezeti le. Tekintsünk a következő lineár egyenletrendszert:

$$\sum F_{ik} X_i = 0,$$

a melyben az F_{ik} -k adott alakok, az X_i -k pedig bizonyos határozatlanoknak ismeretlen homogen alakjai. Ez egyenletrendszer megoldásainak és e megoldások között fennálló vonatkozásoknak tanulmányozása arra vezet, hogy az adott lineár egyenletrendszerből leszámaztatott lineár egyenletrendszerek bizonyos sorozatát tárgyaljuk, míg végül oly leszámaztatott rendszerre jutunk, melynek már egyáltalában nincsen megoldása. Ez vezette

HILBERT-et a tőle $X(R)$ -rel jelölt szám meghatározására, a mely megmutatja, hogy valamely R -edfokú alak együtthatóinak hány független feltételt kell kielégíteniök, hogy adott modulusra nézve zérussal legyen congruens.

De hogy az elmélete teljes legyen, HILBERT nem érhetette be azzal, hogy az alap-invariánsok véges rendszerének létezését mutatta ki, hanem még eszközöket kellett teremtenie azoknak valóságos képezésére is. Ezeket pedig megtalálta oly kérdés megoldásával, a mely az algebrai egész számok egész polynomokra kiterjesztett elméletének keretébe tartozik.

A problémát ily módon a következő háromra bontotta fel:

1. Meghatározandók amaz I_m invariánsok, a melyeknek segítségével az összes invariánsok mint ezeknek egész algebrai függvényei kifejezhetők, azaz hogy közülük bármely I invariáns kielégítsen ilyen alakú algebrai egyenletet:

$$I^k + G_1 I^{k-1} + G_2 I^{k-2} + \dots + G_{k-1} I + G_k = 0,$$

a melyben a G együtthatók az I_m -ek rationalis egész függvényei.

2. Meghatározandók amaz invariánsok, a melyeknek segítségével az összes invariánsok rationalisan fejezhetők ki.

3. Meghatározandók azok az invariánsok, a melyekkel az összes többiek egész műveletekkel kifejezhetők.

E problémák közül az 1-nek megoldása a legnehezebb. Ha ez még van oldva, akkor az alakrendszer invariánsainak összessége min algebrai test fogható fel és az első feladat e test fokszámának meghatározására irányul. E feladatot HILBERT legalább binär alakokra megoldotta, kétféle úton is kiszámítván $\varphi(\sigma)$ -t, a σ adfokú egymástól lineárisan független invariánsok számát, illetve (σ) -nak σ nagy értékeire vonatkozó asymptotikus értékét.

Az első probléma meg lévén oldva, a másik kettő visszavezethető az algebrai számtestek elméletének egyik classicus kérdésére. Arról van most szó, hogy megtaláljuk amaz alap-invariánsokat, a melyekkel a többiek egész algebrai módon fejezhetők ki.

E célból HILBERT abból a megjegyzésből indul ki, hogy ezek amaz invariánsok lesznek, melyeknek eltűnése az összes többiek eltűnését maga után vonja. Ily módon érthető, hogy az alapinvariánsok kérdését nagyban kell, hogy előmozdítsa az ú. n. nullaformák tanulmányozása; ez elnevezésen olyan alakokat értvén, melyeknek számbeli együtthatói úgy vannak megválasztva, hogy összes invariánsaik zérussal egyenlők.

Binär alakok esetében a nullaformák azok, melyek valamely lineár tényező elegendő magas hatványával oszthatók; de a többi esetekben a kérdés sokkal finomabb. Erre nézve HILBERT a tételeknek egész sorozatát állapítja meg.

Tekintsünk egy numerikus együtthatókkal felszerelt alakot és tetszés szerinti lineár átalakításból folyó transformáltját; e transformált alak együtthatói a lineár helyettesítés együtthatóinak polynomjai lesznek. Ha a helyettesítés determinansa e polynomok *algebrai egész* függvénye, az adott alak nem lesz nullaforma, az ellenkező esetben igen.

Tekintsük más oldalról valamely alaknak oly lineár helyettesítéssel levezetett transformáltját, a melynek együtthatói tetszőleges t parameter növekedő hatványai szerint kifejthető függvényei, oly módon, hogy a hatványsorba való kifejtésükbe negatív kitevőjű tagok is beléphessenek. Ha most már nullaformáról van szó, a lineár helyettesítés úgy választható, hogy determinansa a $t=0$ helyen végtelenné legyen, míg a transformált alak együtthatói ugyane helyen végesek maradnak. HILBERT most kimutatja, hogy ez a feltétel szükséges és elegendő arra, hogy az adott numerikus forma nullaforma legyen. Minden nullaformához tehát egy vagy több lineár substitutio is tartozik, melynek megvan a fent kimondott sajátsága. Ezt kimutatván, HILBERT bebizonyítja, hogy kiindulva tetszésszerinti nullaformából, ezt lineár helyettesítéssel mindig bizonyos kanonikus nullaformába transformálhatjuk. Kanonikus valamely nullaforma pedig akkor, ha a neki megfelelő fenti sajátságokat mutató helyettesítés ilyen alakú:

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{Bmatrix}$$

A nullaformák vizsgálata ily módon vissza van vezetve a kanonikus nullaformák tetemesen egyszerűbb vizsgálatára. Az eredménye a vizsgálódásnak az, hogy a kanonikus nullaformák azok, a melyekben egy bizonyos geometriai schema alapján könnyen meghatározható tagok hiányzanak. Mindezekből látható, hogy HILBERT vizsgálódásai után az invariánsok elmélete, mely már félszáz évvel ezelőtt annyi kiváló matematikusra csábító varázserőt gyakorolt, egészen új és a réginél mennyivel elegánsabb formát öltött.

Az e szám.

HERMITE bizonyította be legelőször, hogy az e szám transzcendens, kevéssel utána LINDEMANN kiterjesztette ezt az eredményt a π számra. Ezek kétségtelenül a tudományos kutatásnak fényes győzelmei; mindazonáltal mindenki érezte, hogy HERMITE módszerei — bármily geniálisak és eredetiek lettek legyen — még tökéletesíthetők, mert nem éppen a legrövidebb úton vezettek célhoz. HILBERT-nek volt megadva a legrövidebb úton e tételeket beh bizonyítani s nem valószínű, hogy a jövő fejlődése őt e tekintetben felülmulhatná.

Ime már a második példa arra, hogy HILBERT nehezen kimutatható, mély tételeknek bámulatosan egyszerű bizonyításait adta. Ez a nagy egyszerűsítő képessége ilyen formán tudományos képének egyik jellemző vonása.

Számelmélet.

HILBERT számelméleti munkái legfőképen az algebrai számtestekre vonatkoznak. Egy vagy több algebrai számból racionális műveletek segítségével levezethető számok összessége

számtestet vagy rationalis tartományt alkot; közülök az algebrai egész számok összessége a számtest integritási tartományát szolgáltatja.

Ha most már valamely számtest mindamaz algebrai egész számaikat tekintjük, a melyek az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p$$

alakra hozhatók, a hol az a -k a számtest adott egész számai és az x -ek ugyane számtestnek tetszésszerűen egész számai, akkor ezeknek összessége az, a mit ideálnak nevezünk. A mi e megfontolásoknak érdeket kölcsönöz, az az a körülmény, hogy az ideálok oszthatósági viszonyainak tekintetében a közöséges számelmélet törvényeinek hódolnak; jelesen, minden ideal egy és csak egyféleképp bontható fel törzsidealokra. Ez DEDEKIND alaptétele.

Más oldalról oly számokat is tekinthetünk, a melyek adott D rationalis tartományba tartozó együtthatókkal felszerelt algebrai egyenletnek tesznek eleget. Ezek a számok és a velök rationalisan kifejezhetők új, az eredeti D rationalis tartományánál kiterjedtebb D_1 rationalis tartományt alkotnak; egyszerűsmond D_1 integritási tartománya K_1 kiterjedtebb a D integritási tartományánál, a K -nál. A K_1 tartományt most nemcsak a közöséges rationalis számok alkotta testre, hanem K -ra való vonatkozásaiban is vizsgálhatjuk. Így szólhatunk K_1 -nek K -ra vonatkozó relativ fokszámáról, a K_1 valamely számának a K -ra vonatkozó relativ normájáról stb. Így beszélhetünk relativ quadratikus testekről, melyek D ből $\sqrt{\mu}$ adjunctiója útján keletkeznek, a hol μ a D -nek valamely száma, vagy relativ ABEL-féle számtestekről, melyek D -ből D -ben ABEL-féle egyenlet gyökének adjunctiója útján származnak. Ime ez DEDEKIND eszméinek bizonyos általánosítása, melyet mások talán megsejtettek, de a melyekből HILBERT egészen váratlan előnyöket merített.

Szólnunk kell még GALOIS-féle számtestekről, a melyek GALOIS-féle egyenletből vannak leszármaztatva. Bármely számtest mindig



valamely GALOIS-féle számtestben foglaltatik épp úgy, mint fent a D_1 -ben; e GALOIS-féle számtest úgy keletkezik, hogy az eredeti számtesthez az őt definiáló egyenletnek nemcsak *egy*, hanem az *összes* gyökeit adjungáljuk. Valamely tetszés szerinti algebrai számtestre vonatkozó összes kérdések ilyen értelemben vissza vannak vezetve a föléje rendelt GALOIS-féle test analog problémáira.

Miután HILBERT megmutatta, hogy bizonyos congruentia discussiója alapján miképen határozhatók meg az összes adott normához tartozó idealok, a DEDEKIND-féle alaptételnek eladdig igen szövevényes bebizonyítása helyett, újat keresett; mindenk előtt fölötte egyszerűen sikerült ez neki GALOIS-féle testekre, a honnan minden nehézség nélkül áttért bármely testre.

Ily módon HILBERT GALOIS-féle számtesteket tanulmányozván, az új fogalomalkotásoknak egész seregét állapította meg. Így az eredeti számtestet defináló egyenlet GALOIS-csoportjában foglalt különböző alcsoportokkal kapcsolatban definiálja az alárendelt számtest fogalmát. Ezeket a szóban lévő alcsoportokat bizonyos közöttük és a számtest tetszésszerű tőrsideálja közötti kapcsolatok határozzák meg és segítségükkel egészen új és felette érdekes perspectiva nyílik meg a számtestek szerkezetének tanulmányozására.

1896-ban HILBERT KRONECKER-nek azt a tételét, hogy minden ABEL fél egyenlet gyökei egységgyökökkel kifejezhetők, új alapon bebizonyította be. Bebizonyítása tisztán arithmetikai és azonfelül még evidentiába helyezi azt az utat is, a melyen az adott csoporthoz és megadott discriminanshoz tartozó összes ABEL-féle számtestek előállíthatók.

De HILBERT műveiben legfőképen a relative quadratikus és relative ABEL-féle számtestekkel foglalkozott. A számelméletnek egyik leglényegesebb pontja GAUSS-nak a quadratikus maradékok elméletében szereplő reciprocitási törvénye; tudjuk, hogy mily előszeretettel viselkedett e nagy matematikus e kérdés iránt és hányféleképen bebizonyította be ezt a tételt.

E tétel érdekes általánosításokra nyújt alkalmat, midőn el-

hagyjuk a közönséges rationalis egész számok tartományát és tetszésszerű rationalis tartományt fektetünk alapul. HILBERT-nek sikerült az általánosítás oly számtestekre nézve, melyek imaginariusok és a melyeknek osztályszáma páratlan. LEGENDRE symbolumával analog symbolumot vezetvén be, sikerült neki a tőle felfedezett általános reciprocitási törvényt egyszerű alakban kifejeznie. Tudniillik bizonyos számú ilyen symbolum szorzatának mindig 1-el kell egyenlőnek lennie. Ez az általánosítás annyival érdekesebb még, hogy ennek révén HILBERT kimutathatta, hogy a lehetséges genusok fele része mindig valóban képezhető is; ez oly eredmény, mely lehetővé tette GAUSS-nak a quadratikus alakokra vonatkozó megállapított genus fogalomalkotását, melynek elmélete a *Disquisitiones Arithmeticae* legvonzóbb fejezetei közé tartozik, átvinni tetszésszerű rationalis tartományokra.

Hogy mélyebbre hatolhasson, HILBERT kénytelen volt az *osztály* fogalomalkotását módosítani. Két ideal a szó tágasabb és régi értelmében ugyanabba az osztályba tartozott, ha hányadosuk algebrai szám; a szó szorosabb és új értelmében pedig ugyanabba az osztályba akkor tartoznak, ha hányadosuk oly algebrai szám, mely összes conjugált értékeivel együtt positiv. A szó tágabb és a szó szorosabb értelmében vett osztályok számai szoros kapcsolatban vannak egymással, a mint ezt HILBERT felismerte. Ez az új fogalomalkotás egyszersmind lehetővé tette HILBERT-nek a tőle talált tételeket, egyszerűbben formulázni. E tételek nagy általánosságuk mellett bámulatosan egyszerűek és — a mint HILBERT magát kifejezi — kristálytisztá szépségükkel tűnőlkölnek, teljes bebizonyításuk pedig HILBERT-nek mint az algebrai számtestekre vonatkozó kutatásainak legfőbb és végső célja lebeg szeme előtt. Mi e tételeket általános alakban akarjuk kimondani.

Ha k tetszésszerű számtest, akkor mindig van oly Kk osztálytestnek (Klassenkörper) nevezett test, melynek rendszáma a szűkebb értelemben vett osztályok számával megegyezik. Ez az osztálytest elágazatlan, azaz K -nak semelyik törzsidealja

sem osztható Kk -ban törzsideal négyzetével, továbbá magában foglalja a k -ra elágazásos összes relative ABEL-féle számtesteket.

Relativ csoportja isomorph azzal az ABEL-féle csoporttal, melyet a k osztályainak compositiója megállapít.

A k -nak törzsidealjai Kk -ban általánosságban nem törzsidealok; tehát Kk -ra vonatkozólag tözsidealok szorzatára fölbonthatók; e fölbontásban a tényezők száma és kitevőik, a melyek szerepelnek, egyszóval a fölbontás alakja, kizárólagosan amaz osztálytól függ, a melyben a szóban forgó ideal a k számtestben besorozható.

Nevezzük továbbá Kk -nak ama számait, a melyek conjugált értékeikkel együtt positiv előjelűek és e conjugáltakkal osztva hányadosul egységet szolgáltatnak, ambiguáknak, akkor Kk minden ambigua számának k -nak egy-egy idealja felel meg és megfordítva. Ez a tulajdonság jellemzi a Kk osztálytestet minden egyéb k -ra relative ABEL-féle testtel szemben.

Látni való ezekből, hogy e tételek mily messzevágó fontosságúak és hogy mily erős világításba helyezik az osztálynak fogalomalkotását, mert az idealosztályok közötti vonatkozások az osztálytest számai közötti vonatkozásokban lelik hű tükörképüket.

HILBERT maga nem bizonyította be e tételeket legáltalánosabb formulázásukban, csak speczialis esetekben, de ezek igen változatosak, számosak és kiterjedt körűek, úgy hogy meg volt róla győződve, hogy módszereinek segítségével az általános esetben felmerülő nehézségek is leküzdhetők. E meggyőződését valóra váltotta PH. FURTWÄGLER, a kinek sikerült HILBERT módszerei segítségével tetszésszerű algebrai számtestre nézve is, az osztálytest létezését bebizonyítani.*

* Ez a hely és néhány más a francia eredeti szövegtől eltérő. Az eltérések POINCARÉ-val folytatott levelezésben megállapított korrekturák, melyek a jelentés francia szövegébe már nem voltak felvehetők, mert szerencsétlen véletlen folytán POINCARÉ levele elkésve érkezett. R.

Előbb már megemlékeztünk a quadratikus maradékok elméletében szereplő reciprocitási törvényről; hozzá kellett volna tennünk, hogy HILBERT egészen analog törvényt bizonyított be tetszésszerinti hatványmaradékról, bizonyos speczialis számtestek tartományára nézve.

Összefoglalásban mondhatjuk, hogy az idealoknak KUMMER és DEDEKIND által történt creálása nagy haladást jelentett az algebrai számok elméletében, mert ezek által GAUSS-nak a quadratikus alakokra vonatkozó elmélete nemcsak tetemesen általánosítható volt, hanem egészen új megvilágításba is helyeztetett.

HILBERT idevágó és az imént ismertetett munkái új lépést jelentenek az elmélet tovább építésében, mely jelentőségében mivel sem csekélyebb az idealok creálásánál.

Waring tétele.

Beszéljünk most HILBERT-nek egy az előzőktől teljesen elütő más számelméleti dolgozatáról. WARING tételéről van szó, mely szerint minden egész szám N számú teljesen n -edik hatvány-nak összegére bontható fel, a hol N csakis n -től függ. Felesleges külön felemlitenem, hogy e tétel idáig csak kimondva, de bebizonyítva nem volt.

A mi most már a HILBERT-től adott bebizonyításban figyelmünket leginkább megragadja, ez az a körülmény, hogy vele a folytonos változóknak számelméleti kérdések tárgyalásában való felhasználására egészen új utat mutatott.

Kiindul olyan identitásból, a melyben egy huszonötszörös integral egyenlitve van öt négyzet összegének m -edik hatványával. Felbontván az integratio tartományát apróbb tartományokra, oly módon, mint a hogyan a mechanikus quadraturáknál az integrált megközelítő értékek sorozatát kapjuk és egy HILBERT-re jellemző határátmenetet alkalmazván, az

$$(x_1^2 + \dots + x_5^2)^m = \sum r_h Y_h^m$$

identitásra jutunk, melyben az r_n -k pozitív rationalis számok, Y_n -k pedig egész együttthatós linear formák. Az r_n együttthatók, valamint kettő az Y_n linear formák közt egyedül m -től függ.

Eddig még nem léptük túl az algebra keretét, ha csak nem annak kimutatásánál, hogy az r együttthatók és az Y_n -k együttthatói rationalis számok. HILBERT, hogy előre haladhasson, most a segédtételeknek egész sorozatát fejt ki, melyek sokkal bonyolultabbak, semhogy azokat itt reprodukálhatnám, de a melyeknek segítségével a szerzőnek végül sikerül a tételt teljesen bebizonyítani. Nem kételkedhetünk benne, hogy ezek a megfontolások, melyek ily módon határozott integrált tartalmazó identitások felhasználásával számelméleti tételek felfedezésére vezetnek, egykor, ha majd ennek az eljárásnak mélyebb értelmét is tisztán felfogjuk, a WARING-féle tételt messze túlhaladó szélesebb körben is termékeny alkalmazásra számíthatnak.

Geometriai kutatások.

Elérkeztem HILBERT-nek a geometria alapvetésére vonatkozó és oly rendkívüli mértékben eredeti munkáihoz. A geometriai philosophia történetében három korszak különböztethető meg: az első az, a melyben mély gondolkodók, kiknek élén BOLYAI-t kell különösen idéznünk, megalapították a *nem-euklidesi* geometriát; a második az, a melyben HELMHOLTZ és LIE megmutatták a mozgás és csoport fogalmainak szerepkörét a geometriában; a harmadik korszak HILBERT-tel indul meg. A német szerző a logika álláspontjára helyezkedik. Felteszi a kérdést, hogy melyek azok az axiómák, a melyeket kimondanak és melyek azok, melyeket alattomban, kimondás nélkül használnak? Mi a valódi logikai tartalmuk és mit lehet belőlük az intuitióra való újabb folyamodás nélkül, tisztán a logika szabályainak egyszerű alkalmazásával levezetni? Végül függetlenek-e azok egymástól, vagy lehet-e egyiket a másikból levezetni? Ime ilyenek a tárgyalandó kérdések.

HILBERT azon kezdi, hogy az axiómák teljes lajstromát elkészítse, iparkodván e listában közülni egyet sem felejtetni ki; ez nem oly könnyű feladat, mint az ember hihetné, hiszen maga EUKLIDES hallgatagon alkalmazott oly axiómákat is, melyeket sohasem mondott ki. A geometriai szemlélet annyira vérünkben van, hogy azt gyakran alkalmazzuk, a nélkül, hogy észre is vennők. Innen ered annak a szüksége, hogy a geometriai szemléleteknek a legkisebb teret se engedjünk, ha a HILBERT-től kitűzött czélt el akarjuk érni.

A tudós professzor az axiómákat öt csoportra osztja fel.

I. *Axiome der Verknüpfung* (én inkább projectiv axiómáknak nevezném őket, semmint a szószerinti fordításból keletkező «kapcsolás axiómáit» használnám, mely kifejezés nem volna kielégítő).

II. *Axiome der Anordnung* (az elrendezés axiómái).

III. *A congruentia axiómái* vagy metrikus axiómák.

IV. *Archimedes axiómája*.

A projectiv axiómák között megkülönböztetjük a sík és tér ilyen axiómáit; az első azok, melyek abból a jól ismert proposícióból származnak, hogy: *két ponton át egy és csak egy egyenes halad át*.

Térjünk át a második csoportra, az elrendezés axiómáira. Íme az első kettőnek formulázása:

«Egy ugyanazon egyenesen fekvő három pont között van bizonyos vonatkozás, melyet úgy fejezünk ki, hogy a pontok egyike és csak egyike fekszik a másik kettő között. Ha a C az A és B között van és ha D az A és C között van, akkor D is az A és B között van.

Itt látjuk, hogy nem mozgósítjuk a geometriai szemlélő képességünket és ha a közéesés szónak értelmét ilyformán nem iparkodunk mélyíteni, akkor minden vonatkozás, mely ez axióma követeléseinek eleget tesz, ugyanezzel a kifejezéssel illelhető.

A harmadik csoport a metrikus axiómákat tartalmazza. Ezek között három alcsoportot különböztetünk meg, melyek rendre a vonaldarabokra, a szögre és a háromszögre vonatkoznak.

HILBERT művében itt egy lényeges pont figyelmen kívül maradt; az axiómák sorozatát ki kellett volna egészítenie még azzal az axiómával, hogy az AB a megfordított BA vonal-darabbal congruens. Ez magában foglalja a tér symmetriáját és az egyenlőszárú háromszög alapja melletti szögeinek egyenlőségét. HILBERT itt még nem tárgyalja ezt a kérdést, de vele külön foglalkozott egyik értekezésében, a melyre még visszaterünk.

A negyedik csoport csak EUKLIDES postulatumát tartalmazza.

Az ötödik csoport két axiómából áll; az első, ARCHIMEDES axiómája, a fontosabb.

Legyen valamely D egyenesen A és B két tetszés szerinti pont; legyen továbbá a tetszés szerinti vonal-darab; szerkesz-szük most A -ból kiindulva s B felé tartva az a -val egyenlő darabok sorozatát: $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$; akkor n mindig akkorára választható, hogy B e vonal-darabok valamelyikére ráessék.

Ez annyit jelent, hogy adva lévén két tetszésszerinti vonal-darab l és L , mindig van elegendő nagy n egész szám, hogy l -et n -szer önönmagához illesztvén, az L -et felülmúló vonal-darabot kapjunk.

A második az *Axiom der Vollständigkeit*, melyre még visszatérünk.

Az *axiomáknak egymástól való függetlensége*. Az axiómák sorozata egyszer fel lévén állítva, meg kell most vizsgálnunk, mentesek-e azok ellentmondásoktól. Jól tudjuk, hogy igenis azok, mert hisz tudjuk, hogy a geometria valóban létezik. HILBERT is geometriáját alkotván, eleve igennel válaszolt volna. De csodálatos módon ez a geometria nem egyezik meg teljesen a miénkkel, az ő tere nem a miénk vagy legfeljebb része a miénknek. HILBERT terében nincsenek meg a mi terünk összes pontjai, hanem csak azok, melyek kiindulva két adott pontból tisztán vonalzó és körző alkalmazásával megszerkeszt-hetők. Ebben a térben pl. 10° -ú szög nem létezik.

Művének második kiadásában arra törekedvén, hogy ne ide-

gen geometriákat, hanem a mi rendes geometriánkat megkapja, az axiómák sorozatát egy-gyel kiegészíti, az *Axiom der Vollständigkeit*-tal, melyet ekként formuláz:

A pontok, egyenesek és síkok rendszeréhez lehetetlen hozzácsatolni a dolgok más rendszerét úgy, hogy a teljes rendszer az összes axiómáknak megfeleljen.

Világos, hogy a tér, melyről előbb szoltottam s a mely nem tartalmazza a mi terünk összes pontjait, nem elégitené ki ezt az utolsó axiómát, mert hozzá a mi terünk pontjai közül azok adjungálhatók, melyeket maga nem tartalmaz, a nélkül, hogy ezáltal megszűnnék a többi axióma követeléseit kielégíteni.

Tehát végtelen sokféle tér van, a mely az *Axiom der Vollständigkeit*-tól eltekintve a többi axióma követeléseinek eleget tesz, de csak egyetlen egy, még pedig a mi közönséges terünk, mely ezenkívül még ennek az utolsó axiómának is megfelel.

Fel kell most már vetni a kérdést, hogy függetlenek-e egymástól a felsorolt axiómák, azaz nem lehet-e feláldozni az öt axióma-csoport egyikét és a megmaradt négygyel boldogulva, összefüggő geometriát alkotni. Úgy pl. a mint a IV. csoport elhagyásával BOLYAI-nak *nem-euklidesi* geometriáját kapjuk.

Ugyanigy elhagyható a III. csoport. HILBERT-nek sikerült geometriát alkotni a I., II., IV. és V. csoport, valamint a vonaldarabra és szögekre vonatkozó metrikus axiómák fenntartásával, de emellett elejtette a háromszögre vonatkozó metrikus axiómát, a III. 6. propositióját.

A *nem-archimedesi geometria*. De HILBERT-nek legeredetibb conceptiója a *nem-archimedesi geometria*, a melyben az összes axiómák az archimedesinek kivételével igazak. E célra előbb a *nem-archimedesi számoknak* rendszerét kellett megalkotnia, azaz az elemeknek oly rendszerét, a melyben az egyenlőség és egyenlőtlenség fogalmait, továbbá az aritmetika összeadási és szorzási műveleteinek megfelelően operatiókat lehet megállapítani, hogy ezek a következő kikötéseknek megfeleljenek:

1. A számtan összeadási és szorzási műveleteinek szabályai

(commutativ, associativ, distributiv elvek [Arithmetische Axiome der Verknüpfung] változatlanul fennálljanak).

2. Változatlanul fennmaradjanak továbbá az egyenlőtlenségek átalakítására vonatkozó szabályok. (Axiome der Anordnung.)

3. Archimedes axiomája ne maradjon érvényben.

Ilyen rendszerre juthatunk, ha elemekül a következő alakú sorokat választjuk:

$$A_0 t^m + A_1 t^{n-1} + A_2 t^{n-2} + \dots$$

a melyekben m pozitív vagy negatív egész szám, az A együtthatók valós számok és továbbá megállapodunk abban, hogy e sorokra az összeadás és szorzás közösleges szabályait alkalmazzuk. Hogy elemeinket határozott sorrendben elrendezhessük, e sorokra nézve még meg kell állapítanunk az egyenlőtlenség feltételeit is. Itt a következő megállapodásra jutunk: sorunk előjelét A_0 előjellel megegyezően állapítván meg, azt mondjuk, hogy valamely sor egy másiknál kisebb, ha ezt abból levonván, pozitív előjelű különbséget nyerünk.

Világos, hogy — bár e megállapodás mellett az egyenlőtlenségre vonatkozó számítási szabályok érvényben maradnak. — ARCHIMEDES axiomája nem fog többé fennállani.

A mi a közösleges számaink mint a *nem-archimedesi* számok specielis esetei szerepelnek. Az új számok úgyiszlván beilleszkednek a közösleges számok közé, még pedig olyformán, hogy van pl. végtelen sok új szám, mely adott közösleges A számnál kisebb, de e mellett nagyobb az összes A nál kisebb közösleges számoknál.

Ezt megállapítván, képzeljük most oly három méretű tért, a melyben a pontok koordinátái nem közösleges, hanem *nem-archimedesi* számok, de a melyben az egyenes és sík szokásos egyenletei, valamint a vonaldarabok és szögek ismeretes analitikai kifejezési érvényben maradnak. Világos, hogy ebben a térben az archimedesi axioma kivételével, az összes többi axiómák érvényben maradnak.

Bármely egyenesen a mi közösleges pontjaink közé bele

fognak illeszkedni új pontok. Ugyan ilyenképen ezen az egyenesen végtelen sok oly új pont lesz, mely az egyenes minden közönséges pontjától a jobb oldalra esik. Összefoglalásban mondhatjuk, hogy a közönség tér a *nem-archimedesi* térnek csak részét teszi.

Látni való, hogy e felfedezésnek mekkora hordereje van, és hogy ez eszméink fejlődésében nem kevésbé merész lépést jelent, mint a minőt BOLYAI tételét meg velünk a *nem-euklidesi* geometria megalkotásával. A nem euklidesi geometria még tiszteletben tartotta a geometriai continuumról való felfogásunkat, és hogy úgy mondjam csak ennek méréséről való eszméinket zavarta meg. A nem-archimedesi geometria ezt a felfogásunkat szétrombolja és bonczolgatja a continuumot, hogy beléje új elemeket bevezethessen.

Meg kell említenünk, hogy HILBERT-nek e merész concepciójában volt egy előhírnöke. VERONESE-nek a geometria megalapításában analog gondolata volt. Könyvének VI. fejezete valószínű *nem-archimedesi* arithmetikának és geometriának kifejtése, a melyben CANTOR transzfinit számai preponderáló szerepet viselnek. Mindazonáltal HILBERT kifejtésének egyszerűségével és világosságával, philosophiai belátásának mélységével, valamint azokkal az eredményekkel, melyeket alapeszméjéből kifejtett, ez új geometria megalapításánál különösen kitűnt.

A *nem-desarguesi geometria*. A projectiv geometria alap-tételének DESARGUES tételét tekintjük. Két háromszög perspectiv, ha megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek egy pontban futnak össze, DESARGUES mutatta ki, hogy perspectiv fekvést háromszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai egy ugyanazon egyenesben fekszenek; ennek megfordítása is igaz.

DESARGUES tétele kétféleképen is vezethető le:

1. A sík projectiv és metrikus axiomáinak felhasználásával;
2. A sík és a tér projectiv axiomáinak felhasználásával.

Ezt a tételt kétméretű lény is felfedezhette volna, a melynek a háromméretű tér épp annyira elképzelhetetlen, mint előttünk a négyméretű tér; a mely előtt a tér projectiv axio-

mái tehát ismeretlenek volnának, de a mely síkjában, a melyben lakozik, változatlan alakú, szilárd testeinkkel analog alakzatok elmozdulását el tudná képzelni, tehát felismerhetné a metrikus axiomákat. Ugyanezt a tételt felfedezhetné egyszersmind oly három méretű lény is, mely a tér projectiv axiomáit felismerhetné, de nem ismerné a sík metrikus axiomáit.

De be lehetne-e bizonyítani DESARGUES tételét pusztán a sík projectiv axiomáinak felhasználásával, a sík metrikus és a tér projectiv axiomái nélkül is? Azt hitték az emberek, hogy nem, de nem voltak biztosak benne.

HILBERT eldöntötte e kérdést, megalkotván egy *nem-desarguesi geometriát*, a mely — jegyezzük meg jól — sík-geometria.

A *nem-pascali geometria*. De HILBERT ezzel még nem éri be, még egy új conceptióval lép elénk. Hogy ezt jól megértsük, mindenekelőtt egy pillanatra vissza kell térnünk az arithmetikához. Az előbb láttuk a szám fogalmának kibővítését *nem-archimedesi* szám bevezetése révén. Az új számoknak bizonyos osztályozására van szükségünk, és hogy erre rájussunk, előbb osztályozzuk az arithmetika axiomáit négy csoportba; ezek a következők:

1. Az összeadás commutativ és associativ törvénye; a szorzás associativ törvénye, a szorzás két distributiv törvénye; összefoglalva tehát az összeadás és szorzás szabályai a szorzás commutativ elvének kivételével.

2. Az elrendezés axiomái, azaz az egyenlőtlenségekre vonatkozó számítási szabályok.

3. A szorzás commutativ törvénye, melynek értelmében a szorzat tényezőinek felcserélésekor nem változik.

4. ARCHIMEDES axiomája.

Az első két csoport törvényeinek hódoló számokat *desarguesi* számoknak mondjuk: ezek lehetnek *pascali* vagy *nem-pascali* számok, a szerint, mint a 3. csoportnak eleget tesznek vagy nem; *archimedesi* vagy *nem-archimedesi* számok lesznek, a szerint, a mint a 4. csoportnak engedelmeskednek vagy nem.

A közöséges számok egyúttal *desarguesiak*, *pascaliak* és

archimedesiek is. A commutativ törvény bebizonyítható, kiindulva az első két csoportból, hozzávéve még ARCHIMEDES axiómáját; tehát oly számok, melyek *desarguesi* és *archimedesi* számok nem lehetnek, *nem-pascaliak*.

Viszont könnyű a *desarguesi* számok oly rendszerét megalkotni, mely egyszersmind *nem-pascali* és *nem-archimedesi*. E rendszer elemeit a következő alakú sorok szolgáltatják:

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \dots,$$

a hol s az előbbeni t -vel analog symbolum, n positiv vagy negativ egész szám, a T_0, T_1, \dots , együtthatók a pedig T *nem-archimedesi* rendszerbe tartozó számok; ha tehát T_0, T_1, \dots együtthatókat a t hatványai szerint haladó végtelen sorkifejezéseikkel helyettesítjük, oly sort kapunk, a mely t -től és s -től függ. E sorokat a közönséges szabályok szerint fogjuk összeadni; a szorzásuk tekintetében még nem fogjuk engedni az associativ és distributiv törvény szabályait, de nem többé a commutativ elvet, mert ezzel ellentétben legyen $st = -ts$.

Hátramaradt még, hogy e sorokat határozott sorrendbe szedjük, hogy az elrendezés axiómái követeléseinek eleget tegyünk. E célból az egész sor előjelét T_0 előjelével megegyezően állapítjuk meg és továbbá azt mondjuk, hogy két sor között az a kisebbik, a mely a másikból kivonatván positiv előjelű különbséget szolgáltat. Ez a szabály mindig megismétlődik: t -t e vizsgálódásokban mindig oly számnak tekintjük, mely bármely közönséges valós számhoz képest igen nagynak tekintendő, s -et pedig igen nagynak tekintjük a T rendszer bármely számához képest.

A szorzás commutativ törvénye e számokra nem lévén érvényes, ezek *nem-pascali* számok.

Mielőtt tovább haladnék, HAMILTON-ra emlékeztetek, a ki már régen vezette be a számításba a complex számok oly rendszereit, a melyekre a szorzás commutativ törvényének hatálya nem terjed ki; ezek a *quaterniók*, melyeket az angolok a matematikai physikában oly gyakran alkalmaznak. Azonban

a quaterniókra az elrendezés axiómái nem érvényesek; a mi most HILBERT conceptiójában annyira eredeti, az az a körülmény, hogy az ő számai az elrendezés axiómáinak megfelelnek a nélkül, hogy a commutativ törvénynek hódolnának.

Térjünk vissza a geometriához. Engedjük meg az axiómák első három csoportját, azaz a sík és a tér projectiv axiómáit, az elrendezés axiómáit és euklidesi postulatumat, akkor DESARGUES tétele még mindig bebizonyítható, mert ez a tér projectiv axiómáinak következménye.

Geometriánkat meg akarjuk alapítani a metrikus axiómák felhasználása nélkül; a hosszúság elnevezésének ekkor értelme teljesen elvész; nincs többé jogunk körző használatával élni, de kárpótlásképen használhatjuk a vonalzót, mert az egyik elfogadott projectiv axióma értelmében két ponton át tudunk egyenest húzni; képesek leszünk továbbá adott ponton át adott egyenessel parallelát is vonni, mert EUKLIDES postulatumat is érvényben lévőknek elfogadtuk. Nézzük most már, hogy ezekkel a segédeszközökkel mit bírunk végezni.

Tudjuk velük két idom hasonlóságát definiálni és ezekkel a proportiókat. Definiálhatjuk bizonyos mértékben az egyenlőséget is.

Egy parallelogramma két szemközti oldala *e definitio szerint* egyenlőnek veendő; tehát eldönthetjük, hogy két vonaldarab egyenlő-e, ha csak *parallel fekvésű*.

E megállapodás alapjain képesek vagyunk két vonaldarab nagyságát összehasonlítani, *feltéve, hogy azok parallelák*. Két különböző irányú vonaldarab hosszúságának összehasonlítása oly dolog, melynek itt semmi értelme sincsen és minden irány számára egy-egy hosszegység kellene. Felesleges hozzátennünk, hogy a szög elnevezés itt minden értelem nélkül való dolog.

A hosszúságok így ki lesznek fejezhetők számok segítségével; de ezek nem lesznek szükségképpen közönséges számok. Minden, a mit róluk mondhatunk, csak annyi, hogy *desarguesi* számok lesznek, ha DESARGUES tétele érvényes. Ha megfordítva most már a *desarguesi* számok tetszés szerinti rendszere van

adva, akkor mindig alkotható oly geometria, a melyben a vonaldarabok hosszúsága éppen ezekkel a *desarguesi* számokkal kifejezhetők.

A sik egyenlete a közönséges analytikai geometriából ismert linear-egyenlet lesz; de mivel az az *S*-rendszerben a szorzás nem commutativ, meg kell mondani, hogy az egyenlet minden tagjában a *coordinata* mint szorzandó, az állandó egyűththató pedig mint szorzó szerepel.

Ily módon minden *desarguesi* számrendszerhez egy-egy *desarguesi* geometria tartozik, a melyben a projectiv és az elrendezés axiómái, DESARGUES tétele és EUKLIDES postulatuma érvényes. Mi most már az arithemikai axiómák harmadik csoportjának, azaz a szorzás commutativ törvényének a geometriai értelme? *E törvénynek lefordítása a geometria nyelvére a PASCAL tétele*; e tétel ama specialis esetéről van itt szó, a melyben a kúpszelet, a melybe írt hatszögre PASCAL tétele vonatkozik, egyenespárrá fajul el.

PASCAL tétele tehát igaz vagy hamis, a szerint, a mint a számgknak *S* rendszere *pascali* vagy *nem-pascali*, úgy, hogy a mint vannak *nem-pascali* számrendszerek, *azonképen vannak nem-pascali geometriai rendszerek is*.

PASCAL tétele a metrikus axiómák alapján bebizonyítható; igaz lesz tehát, ha az idomoknak nemcsak homothetikus és translatorius átalakításait, hanem forgatását is megengedjük.

PASCAL tétele ARCHIMEDES axiómájából is levezethető, mert mint láttuk, az oly számrendszerek, a melyek *desarguesiak* és *archimedesiek*, egyszersmind *pascaliak is*; tehát minden *nem-pascali geometria egyszersmind nem-archimedesi is*.

A *Streckenübertrager*. Említsük HILBERT-nek még egy conceptióját. Ő azokat a szerkesztéseket tanulmányozza, a melyeket nem a vonalzó és körző segítségével, hanem vonalzóval és egy specialis műszerrel el lehet végezni, a melyet *Streckenübertragernek* nevezett és a melynek segítségével adott egyenesre rá lehet rakni oly vonaldarabot, mely más egyenesen adott vonaldarabbal egyenlő. A *Streckenübertrager* a körzővel

nem egyenlő értékű, mert míg a körzővel két kör, vagy kör és egyenes metszéspontjait szerkeszthetjük meg, addig a *Streckenübertrager* csakis valamely körnek a középpontján áthaladó egyenesekkel való metszéspontjait szolgáltatja. HILBERT most már kutatja, hogy mely szerkesztések azok, melyek vonalzó és *Streckenübertrager*-rel végezhetők és e tekintetben igen figyelemreméltó eredményekre jutott.

Minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés egy-szersmind vonalzó és *Streckenübertrager*-rel végezhető, ha a szerkesztés feladata olyan, hogy mindenkor valós eredményt szolgáltat. Világos, hogy e feltétel szükséges, mert pl. a középpontján áthaladó egyenes a kört mindig valós pontokban metszi. De bajos lett volna a feltétel elegendő voltát előre látni, a mit azután HILBERT valóban bebizonyított,

De ezzel még nincsen vége; mindezekben a szerkesztésekben, a mint ezt KÜRSCHAK vette észre először, a *Streckenübertrager* pótolható az *Eichmass*-szal, oly műszerrel, a mely nem bármely vonaldarabnak, hanem csak a hosszegységnek átszállítására alkalmas.

Analog kérdést tárgyal HILBERT «*Über die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*» című cikkében.

A közönséges sík-geometriában a sík szimmetrikus, a mi az egyenlőszárú háromszög alap melletti szögei egyenlőségében nyilvánul.

A sík e szimmetriáját a metrikus axiómák sorában kell szerepeltetni. Az összes idáig említett többé-kevésbé idegen-szerű geometriában, így a metrikus *nem-archimedesi* geometriában, valamint DEHN «*Über eine neue Begründung . . .*» című értekezésében kifejtett új geometriájában is, a sík e szimmetriája fel van tételezve. Nem következménye-e talán a többi metrikus axiómáknak? HILBERT kimutatta, hogy ez valóban így van, midőn az ARCHIMEDES axiómája érvényesül, valamint azt is, hogy az ellenkező esetben ez nincsen így. Vannak ugyanis *nem-archimedesi* geometriák, melyekben az összes metrikus axiómák érvényesek, de nem érvényes a sík szimmetriájára vonatkozó.

Ebben a geometriában nem áll, hogy az egyenlőszárú háromszög alapja melletti szögek egyenlők; nem áll az sem, hogy egyik oldal kisebb a másik kettő összegénél; nem igaz PYTHAGORAS-nak az átfogó négyzetére vonatkozó tétele sem. Ez utóbbi okból e geometriát *nem-pythagorasisnak* nevezik.

Elérkezem most HILBERT-nek egy fontos értekezéséhez, melynek czime: «*Grundlagen der Geometrie*», ugyanaz, mint a *Festschrift*-ben foglalté, de a melyben egészen más álláspontra helyezkedik. A *Festschrift*-jében, a mint az annak előbb adott elemzéséből látható, a tér fogalma és a csoport fogalma közötti vonatkozások, a mint azok LIE műveiből következnek, teljesen figyelmen kívül maradtak, vagy legalább is háttérbe szorultak. Ez már nincsen így abban az értekezésben, a melyről most készülünk szólni.

A LIE eszméihez való csatlakozással elért haladás tekintélyes. LIE feltette, hogy az ő csoportjait definiáló egyenletek analitikaiak. HILBERT feltevései sokkal általánosabbak. Kétségtelen, hogy még ezek sem teljesen kielégítőek, mert míg csoportjainak *alakja* tetszőlegesen van feltételezve, ennek *anyaga* (sa matière), azaz a sík, melyre a transformatiókat alkalmazzuk, mégis csak annak a feltételnek van alávetve, hogy LIE értelmében vett *Zahlenmannigfaltigkeit* legyen. De azért HILBERT-nek e dolgozata mégis csak hatalmas lépést jelent a haladás útján, mert benne a *Zahlenmannigfaltigkeit*-nak jobb elemzését adja, mint bárki előtte, azonkívül pedig oly aperçut tartalmaz, melyek az analysis situs axiomatikus elméletének csirái gyanánt tekinthetők.

Lehetetlen meg nem lepődni attól az ellentétől, mely HILBERT-nek ebben a dolgozatában elfoglalt álláspontja és a között fennforog, melyet a *Festschrift*-jében elfoglalt. Ebben a *Festschrift*-ben a folytonosság axiomái az utolsó sorokba szorulnak, ott a nagy kérdés abban állott, hogy mi lesz a geometria sorsa, ha azokat teljesen elejtjük. Ebben a dolgozatában azonban ellenkezőleg, a folytonosság HILBERT-nek kiindulópontja és feltett szándéka megvizsgálni, hogy mit tudhatunk

meg egyedül a folytonosság feltételezése alapján, ha még a csoport fogalmát hozzáveszszük.

Szólanunk kell végül «*Flächen von konstanter Krümmung*» című értekezéséről. BELTRAMI mutatta ki, — mint tudjuk — hogy a közönséges térben vannak felületek, a melyek a *nem-euklidesi* sík képei gyanánt tekinthetők, ezek az állandó negatív görbületű felületek; ismeretes, hogy e felfedezés mekkora impulzust adott a *nem-euklidesi* geometriának. De lehet-e a *nem-euklidesi* síkot a teljes egészében ilyen BELTRAMI-felületen ábrázolni? HILBERT kimutatta, hogy *nem*.

A mi a pozitív állandó görbületű felületeket illeti, a melyekre RIEMANN geometriája vonatkozik, azokra nézve HILBERT kimutatta, hogy a gömbön kívül más ilyen természetű zárt felület nem létezhetik.

Az integrálegyenletek.

Az utolsó években HILBERT leginkább az integrálegyenletek elméletével foglalkozott. Ismeretes, hogy ennek az elméletnek alapját még csak néhány évvel ezelőtt FREDHOLM vetette meg; azóta módszerének termékenysége és a matematikai physika problémáinak megoldására való alkalmazhatóságának könnyűsége napról-napra fényesebben bizonyult be. Kétségtelen, hogy ez egyike volt a legnagyobb felfedezéseknek, melyet a matematika terén tettek és magában véve már a legnagyobb mértékben figyelemre és elismerésre méltó. És ha mégis ma nem az első felfedezőnek, hanem igen fontos tökéletesítések szerzőjének ítéljük oda a Bolyai-jutalmat, ez abban a körülményben leli magyarázatát, hogy HILBERT-nek nemcsak az integrálegyenletekre vonatkozó kutatásait, hanem műveinek összességét kellett figyelembe vennünk, mely a matematika legkülönbözőbb ágaira termékenyítő hatású volt és a melynek nagy értéke jelentésem egyéb részeiből kiviláglik. Nem kezdek meg azonban e tárgy fejtegetését a nélkül, hogy hódolatokat ki ne fejezzem ama nagy szolgálatokért, melyeket FREDHOLM a tudománynak tett.

FREDHOLM elmélete a lineár egyenletrendszerek és a determinansok elemi tulajdonságainak általánosításában áll. Ez az általánosítás két úton történhetik: vagy úgy, hogy megszámlálhatóan végtelen sok ismeretlent tartalmazó lineár egyenletrendszereket vizsgálunk, a mi a végtelen determinansok tanulmányozására utal; vagy pedig akként, hogy egy bizonyos $\varphi(x)$ ismeretlen függvényt (a mi az ismeretlen mennyiségeknek egész continuumával ér fel) oly egyenletből törekszünk meghatározni, a melyben ez az ismeretlen függvény integrál jele alatt szerepel. Ezt az utóbbi utat követte FREDHOLM.

Legyen $K(x, y)$ valamely megadott függvény, a melyet *integrálmagnak* nevezünk; a

$$\phi(x) = \int K(x, y) \varphi(y) dy$$

állandó határok közt vett integrált a $\varphi(x)$ függvényből, bizonyos felfogásban, lineár transformatió alkalmazása révén keletkezettnek tekinthetjük és mint ilyent $S\varphi(x)$ -szel jelöljük.

Az integrálegyenletek most már ilyen alakban írhatók:

$$a\varphi(x) + \lambda S\varphi(x) = f(x), \quad (1)$$

a hol $f(x)$ megadott függvény és a állandó. Az egyenleteket elsőfajúnak nevezzük, ha az a állandó zérussal — és másodfajúnak, ha a egyenlő egy-gyel.

Minthogy az (1) alatti egyenletnek x -nek minden, bizonyos számközön belül fekvő értékére kell fennállania, azért az a lineáregyenletek folytonos halmazából álló egyenletrendszerrel ér fel.

FREDHOLM a másodfajú integrálegyenleteket tárgyalta. A megoldás két kifejezés hánnyadosaként fejezhető ki, melyek a determinansokkal analog szerkezetet mutatnak és a λ paraméternek transcendens egész függvényei. A λ bizonyos értékei mellett a nevező zérussá lesz. Lehet továbbá oly $\varphi(x)$ függvényeket meghatározni, melyek azt az egyenletet elégítik ki, melyet (1)-ből kapunk, ha benne $f(x)$ helyébe zérust teszünk; ezek a *sajátos függvények*.

Ezek az eredmények azon feltevés mellett bizonyítottak be, hogy $K(x, y)$ a tekintetbe jövő tartományban véges; ha ez nincsen így, akkor az iteralt integrálmagokra kell áttérni; ha az S lineár helyettesítést n -szer ismételjük, akkor ismét lineár helyettesítést kapunk, de a mely más integrálmagra vonatkozik, legyen ez $K_n(x, y)$; hogy a fent említett módszer egy csekély műfogással való módosítása után még alkalmazható legyen, elegendő, hogy ez iteralt integrálmagok közül legalább egyik K_n a tekintetbe jövő tartományon belül határolt legyen. Ez pedig — mint FREDHOLM kimutatta — számos esetben valóban be is következik. E módszereknek több változós ismeretlen függvényre, valamint több egyenletből álló és több ismeretlent tartalmazó integrálegyenletrendszerekre való általánosítása minden nehézség nélkül megtörténhetik.

FREDHOLM ezután módszerét a DIRICHLET-féle problémára és bizonyos elasticitási problémákra alkalmazta, megmutatván így, hogy a matematikai physika bizonyos problémái miként tárgyalandók.

Ez az osztályrész, melyet a felfedező vett ki magának az integrálegyenletek elméletéből; micsoda része van benne HILBERTnek? Tekintsünk előbb végesszámú lineáregyenletet; ha determinansuk symmetrikus, akkor baloldalaik bizonyos quadratikusan alak partialis differentióhányadosai gyanánt foghatók fel; e megjegyzésből a lineáregyenletrendszer figyelemreméltó tulajdonságainak minden matematikus előtt jól ismert sorozata következik. Az integrálegyenletek elméletében a megfelelő eset az, a melyben az integrálmag symmetrikus, azaz

$$K(x, y) = K(y, x).$$

Ehhez az esethez fűzi HILBERT kezdetben a tárgyalásait. Végesszámú változótól függő quadratikusan alakok tulajdonságait oly módon általánosítja, hogy azok e symmetrikusan alakú integrálegyenletekre alkalmazhatókká lesznek. Az általánosítás egyszerű határmenet útján történik, de ennek a határátmenetnek megvannak a maga nehézségei, melyeket HILBERT oly mód-

szerrel küzdött le, melynek egyszerűségét éppen annyira csodáljuk, a mint biztosságát és általánosságát elismerjük. A kifejtésekben tetszőleges $u(x)$ függvény (esetleg egynél több is) szerepel; a fellépő végtelen sor n tagja után következő maradék azután pusztán n -től függ, az $u(x)$ tetszőleges függvénytől teljesen független, ha csak az $u(x)$ az

$$\int u(x)^2 dx < 1$$

egyenlőtlenséget kielégíti, a melyben az integrál alkalmas határok között veendő. Ez a teljesen új következtetési mód számos más probléma megoldásában is sikerrel használható fel.

HILBERT ily módon FREDHOLM egyik tételét is új úton találja meg, de inkább megmaradok az idevágó eredetibb vizsgálódásai mellett.

Mindenekelőtt FREDHOLM kifejezésének nevezője oly függvény, melynek csak valós zérushelyei vannak; ime általánosításban a quadratikus alakok karakteristikus egyenletének amaz ismeretes tulajdonsága, hogy összes gyökei valósak. Most oly képlet következik, a melyben az integrál jele alatt két tetszőleges függvénynek $x(s)$ -nek és $y(s)$ -nek szorzata szerepel és a mely quadratikus alakok négyzetösszegekre való felbontását kifejező tétel általánosításának fogható fel.

De sietek áttérni tetszőleges függvénynek sajátos függvények szerint haladó sorkifejtésére. Ez a kifejtés a FOURIER-féle sorkifejtéssel analog, mint az elméleti physikában főszerepet viselő más sorok is és a sajátos függvények szerinti kifejtés mindezeknek általánosítása. Arra, hogy valamely függvénynek ilyen kifejtésben része legyen, elegendő, hogy azt az $Sg(x)$ alakra hozzassuk és $g(x)$ folytonos legyen. Ez az eredmény végleges alakja, úgy, a mint azt HILBERT idevágó közleményei közül az ötödikben kimondja. Az első közleményében még bizonyos nagyobb megszorításokat kellett tennie. E helyen SCHMIDT nevét is fel kell említenem, a ki időközben oly dolgozattal lépett fel, mely lehetővé tette, hogy HILBERT tételét az említett megszorításoktól felszabadítsa. Az egyetlen — ily

módon — a függvényre kiszabott feltétel, hogy t. i. az $Sg(x)$ alakra hozható legyen, első megtekintésre elég szövevényesnek látszik, az esetek nagy számában azonban — így pl. akkor, midőn az integrálmag GREEN-függvény — nem kíván egyebet, mint hogy a kifejtendő függvénynek bizonyos számú differentiál-hányadosa képezhető legyen.

HILBERT később e tárgyra vonatkozó nézeteit a következő más módon fejtette ki. Végtelen sok változót tartalmazó alakot és ennek orthogonális helyettesítéssel való átalakítását vizsgálja, mintha végtelen sok méretű térben a másodrendű felületek egyenleteinek különféle alakjait vizsgálná, midőn azokat különböző derékszögű koordináta-rendszerekre vonatkoztatjuk. E célból az adott alak resolvens formájának nevezett kifejezést képezi. Legyen $K(x)$ az adott quadratikuss alak, $K(\lambda, x, y)$ a resolvens formája, akkor ez utóbbit a következő egyenlőség definiálja:

$$K(\lambda, x, y) - \frac{1}{2} \lambda \sum_{(r)} \frac{\partial K(x)}{\partial x_r} \frac{\partial K(\lambda, x, y)}{\partial x_r} = \sum_{(r)} x_r y_r.$$

Ha $K(x)$ alak csak végeesszámú változótól függ, akkor a resolvens forma a λ két racionális egész függvényének hányadosa, mely függvények determinánsok alakjában mutatkoznak. HILBERT erre egy tőle megszokott határátmenetet alkalmaz. E hányados határértéke még akkor is létezik, ha a számlálónak és a nevezőnek külön nincs is határértéke.

Végeesszámú változó esetében, $K(\lambda, x, y)$ a λ -nak racionális függvénye és részlettörtekre bontható. Mi lesz e részlettörtes előállításból, ha a változók száma végtelenné lesz? A racionális törtfüggvény polusai közeledhetnek először a pontok végtelen, de megszámlálható halmazához. E pontok halmaza alkotja azt, a mit HILBERT az alak *szakadós spectrumának* nevez. De lehet e pontok halmaza olyan is, hogy sűrítési helyei a valós tengelynek egy vagy több egész vonaldarabját töltik be. E vonaldarabok összessége alkotja az alak *folytonos spectrumát*.

A szakadós spectrumnak megfelelő részlettörtek összege

összetartó sort alkot, a folytonos spectrumnak megfelelők összege pedig a határon egy ilyen alakú integrált szolgáltat:

$$\int \frac{\sigma d\mu}{\lambda - \mu},$$

a hol az integrál az egész folytonos spectrumra kiterjesztendő, σ pedig a μ -nek alkalmasan választott függvénye. A racionális $K(\lambda, x, y)$ függvénynek határértéke tehát nem meromorphe függvény, hanem oly egyértékű függvény, melynek *coupure*-jei vannak. A részlettörtekre való felbontás így érvényben marad. Ha az adott alak *határolt*, azaz helyettesítési értékei adott számértékeket nem mulhatnak felül, míg a változók négyzetösszege 1-nél kisebb marad, akkor az alak orthogonális helyettesítéssel épp úgy egyszerűbb formára hozható, a miképen ez az ellipsoid egyenleténél a főtengelyekre való transformálással lehetséges.

A quadratikus alakok közül kiemeljük a *téljesen folytonosakat* (vollstetig), a melyeknek növekménye zérus felé tart, midőn az összes változók növekményei tetszésszerűen módosulnak, de egyszerre tartanak zérus felé. Ilyen alaknak nincsen folytonos spectruma, a miből figyelemreméltó egyszerűsítések folynak.

A quadratikus és bilineár alakseregbe vonatkozó tételek, valamint a HERMITE-féle alakra vonatkozók is szintén végtelen sok változó esetére kiterjeszthetők.

De megvannak ebben az új elméletben FREDHOLM módszerének általánosítására vezető csirák is, melyeknek segítségével oly integrálmagvak esetében is boldogulhatunk, midőn a svéd matematikus módszerei cserben hagynak, a mint azt HILBERT tanítványaival evidenciába helyeztette. HILBERT most már mindenekelőtt azzal foglalkozott, hogy tárgyalása módjával asymmetrikus integrálmag esetében is az integrálegyenlettel végezhesen. E célra bevezeti az orthogonális függvényrendszereket, melyeknek segítségével tetszésszerűen függvény FOURIER-módra kifejtethető. Az ismeretlen függvény helyébe ismeretlenül e ki-

fejtés együtthatói lépnek, úgy hogy az integrálegyenlet pótolható a lineáregyenletek megszámlálható halmazából álló egyenletrendszerrel, a melyben az ismeretlenek is megszámlálható halmazzal vannak. Ily módon az integrálegyenletek elmélete egyrészt kapcsolatba lép HELGE v. KOCH-nak a végtelen determinánsokról való fogalomalkotásával, másrészt HILBERT-nek a megszámlálhatóan végtelen sok változót tartalmazó függvényekre vonatkozó elméletével, melynek domináló szerepét HILBERT elméletében éppen az imént volt alkalmunk kiemelni.

Minden integrálmaghoz így tehát egy-egy végtelen sok változós bilineár alak tartozik. Ha az integrálmag symmetrikus, ilyen lesz a bilineár alak is, melyet ekkor quadratikussal alakból leszámaztatva képzelhetünk. Ha a függvénymag a FREDHOLM-tól kimondott feltételeknek felel meg, akkor a bilineár alak *teljesen folytonos* és így folytonos spectrumba nincsen. Ime ez mód arra, hogy FREDHOLM eredményeit új úton rekonstruáljuk és bármilyen kerülő útnak is lássék, mégis az eredmények mélyebb okainak belátására nézve teljesen új perspektívát tár elénk, mely még ezenfelül új általánosításokra is alkalmat nyújt.

Az integrálegyenletek elmélete alkalmasnak kínálkozott bizonyos differentiálegyenletek határfeltételekhez kötött megoldásainak meghatározására; ez oly probléma, a mely a matematikai physika szükségletei tekintetében a legfontosabbak közé tartozik. FREDHOLM bizonyos speciális esetekkel végzett és PICARD általánosította eljárását. HILBERT-nek sikerült e kérdés rendszeres tárgyalása. Tekintsük a

$$\Delta u = f$$

differentiálegyenletet, melyben u egy vagy több változó ismeretlen függvénye. f pedig ugyane változók adott függvénye; Δ pedig bármilyen lineár differentiálkifejezés. Ez az egyenlet, ugyanazon a jogon, mint az integrálegyenlet, oly végtelen lineáregyenletrendszernek tekinthető, melyben az ismeretlenek continuumot alkotnak, de tekinthető bizonyos felfogásban vég-

telen rendű lineár transformatiónak is, mely az u -t az f -be viszi át. Ha ezt az egyenletet megoldjuk, azt találjuk, hogy

$$u = S(f),$$

$S(f)$ ezúttal integrálkifejezést jelent. E szerint a Δ és S két végtelenedrendű lineár-transzformáció symboluma, melyek egymásnak megfordításai. E $S(f)$ integrálkifejezés magva az, a mit GREEN-féle függvénynek nevezünk. Ezzel a függvénnyel legelőször a DIRICHLET-féle problémánál találkozunk, ez akkor a közönséges GREEN-függvény volt, mely sokkal ismeretesebb, semhogy mellette is időznénk; ennek általánosítását több irányban kísérelték meg. HILBERT-nek maradt fenn, hogy a teljes elméletet kifejtse. Minden másodrendű Δ differenciál kifejezéshez és a határfeltételek minden rendszeréhez egy-egy GREEN-függvény tartozik. Említsük itt fel még a GREEN-függvény képzésének módját egy független változó esetére, a hol ez különösen egyszerű alakban mutatkozik és a különböző alakok discussióját, melyet a határfeltételek rendesen felvesznek. Ez meglévén, képzeljük a problémát oly segéd-differenciálegyenletre nézve megoldva, mely az adottal a másodrendű tagjaiban meg-egyezik, akkor a problémánk megoldása egyszerű transzformáció után oly FREDHOLM-egyenlet megoldására vezethető vissza, a melyben az integrálmag a segédegyenlethez tartozó GREEN-függvény.

E segédegyenlet választása és megoldása még nehézségeket okozhat, de HILBERT ezektől is megszabadult a hatodik közleményében. A differenciálegyenlet még mindig FREDHOLM-egyenletbe van átalakítva, de az integrálmag szerepét egy másik függvény vette át, melyet HILBERT *parametrix*-nek nevezett. Ez a függvény alá van vetve mindama feltételeknek, mint a GREEN-függvény, egynek kivételével, mely éppen a legterhesebb volt, t. i. nem tartozik adott differenciálegyenletet kielégíteni. A differenciálegyenlettől szenvedett transzformáció hasonló azzal, mely a lineáregyenletrendszeret éri, ha benne az eredeti ismeretlenek helyébe ezeknek alkalmasan választott lineár kifeje-

zéseit helyettesítjük. Ez a módszer semmiképen sem szorítkozik csak az önönmagukkal adjungált differenciálegyenletekre, a melyekre HILBERT először alkalmazta.

HILBERT ezenkívül az integrálegyenletek elméletébe vágó kérdéseknek egész seregét vizsgálta meg és az elméletnek a legkülönbözőbb területeken való alkalmazását mutatta. Kiterjesztette például módszerét két az elliptikus typushoz tartozó elsőrendű partiális differenciálegyenlethez álló rendszer tárgyalására, valamint az ú. n. *poláris* integrálegyenletekre, azaz oly integrálegyenletekre, melyeknél (1)-ben az a együttható nem *egy*, hanem x -nek oly függvénye, mely hol $+1$ -el, hol -1 -el egyenlő.

Módszereit alkalmazta továbbá a RIEMANN-féle problémára, KLEIN oscillatiós tételére, FUCHS-féle függvények képezésére és még specziálisan arra a problémára, mely x -nek olyatén meghatározását követeli, hogy a

$$\frac{d}{dx} \left[(x-a)(x-b)(x-c) \frac{dy}{dx} \right] + (x+\lambda)y = 0$$

differenciálegyenlet FUCHS-féle egyenletté legyen.

Egyik legváratlanabb alkalmazás, melyet HILBERT mutatott, a MINKOWSKI-féle köbtartalom- és felszínmérés elméletére vonatkozott, a melylyel az integrálegyenletek elméletét kapcsolatba hozta a geometria philosophiai alapvetésében fontos kérdéssel.

Dirichlet elve.

Ismeretes, hogy RIEMANN az ú. n. DIRICHLET-féle elvre támaszkodva, úgyszólván egy tollvonással bizonyította be a DIRICHLET-féle problémára és a conform ábrázolásra vonatkozó alap-tételeket. Egy bizonyos, a tetszőleges U függvényt tartalmazó integrálról, melyet DIRICHLET-féle integrálnak nevez, kimutatta, hogy nem lehet zérussá; ebből azt következtette, hogy mivel az integrál positiv, kell, hogy bizonyos U függvény mellett minimummá legyen és hogy ez a minimum csak akkor követ-

kezhetik be, midőn U harmonikus függvény. A mint később kimutatták, ez az okoskodás hamis volt, mert semmiképen sem bizonyos, hogy minimumnak el kell érnie, de sőt ha el is éretik, hogy ez szükségképen folytonos U mellett fog bekövetkezni.

Az eredmények azonban exactok voltak. E kérdés tisztázásán sokan és sokat dolgoztak; kimutatták, hogy DIRICHLET problémája mindig megoldható és valóban meg is oldották; ugyanaz áll a matematikai physika számos problémájáról is, melyek előbb a RIEMANN-féle módszerekkel megoldhatóknak látszottak. Ez nem az illő helye annak, hogy e dolgok történetét hosszasan elmondjam; beérem annak felemlítésével hogy e történeti fejlődés utolsó eseménye FREDHOLM módszerének megérlelése volt.

Úgy látszott, e sikerek mindenkorra elvesztek, valamint hogy RIEMANN kísérlete és a DIRICHLET-féle elv az örök feledésnek vannak átadva. Sokan sajnálták ezt; érezték, hogy hatalmas kutató eszköztől fosztattak meg és nem tudtak belenyugodni abba, hogy RIEMANN érvelésének meggyőző ereje, a melylyel az a czáfolatok ellenére is még mindig hatott, a valóságban csak az emberi észnek rossz szokásból táplált illúziója legyen; hiszen úgy látszott, mintha ez az érvelés a matematikai gondolatoknak a physikai realitáshoz való valami különös alkalmazkodásán alapulna.

HILBERT most már meg akarta vizsgálni, hogy nem lehet-e a matematikai analysis új segédeszközeivel RIEMANN aperçu-jét szigorú bebizonyítássá átalakítani.

A következőkben elmondom, hogyan jutott célhoz. Tekintsük az összes, az adott feltételeknek megfelelő U függvényeket; válasszunk közülök oly függvénysorozatot, hogy e sorozat függvényeihez tartozó DIRICHLET-integrálok sorozata mint fogyó sorozat e DIRICHLET-integrálok alsó határa felé convergáljon. Nem bizonyos, hogy ez az S sorozat a tekintetbe vett tartomány minden helyén szabályos-e, ingadozhat is bizonyos határok között. De mindig kiválasztható az S sorozatból oly S_1 sorozat, mely e tartomány bizonyos M_1 helyén szabályos; S_1 -

ből leválasztható ismét oly S_2 sorozat, mely természetesen az M_1 helyen szabályos, de szabályos ezen kívül bizonyos M_2 helyen is. Folytatva ezt az eljárást, oly sorozatot kaphatunk, mely annyi helyen szabályos, a hány helyen nekünk tetszik. Kis fogással ebből levezethetünk azután oly sorozatot, a mely valamely megszámlálható végtelen halmaz minden helyén szabályos, pl. az összes rationális számok halmazával meghatározott helyeken. Ha most már be lehetne bizonyítani, hogy a sorozat összes függvényeinek deriváltjai absolut értékükre nézve adott számértéknél kisebbek maradnak, közvetlenül azt lehetne következtetni, hogy e sorozat a vizsgálat egész tartományában egyenletesen convergál és a variatio-számítás szabályait nehézség nélkül alkalmazhatnók.

HILBERT, hogy még azt az utolsó fennmaradt kérdést tisztázza, két különböző műfogást alkalmazott; az elsőt nem fejtette ki annyira, a mennyire kívánnók, inkább a másodikkal élt. Ez pedig abban állott, hogy az U függvényt pótolja oly v függvénynyel, mely belőle kettős quadratura útján keletkezik és a melynek U a két független változó szerint vett másodrendű partialis differentiálhányadosa. v -nek első partialis differentiálhányadosai U -nak egyszerű integráljai lévén, számukra néhány, könnyen bebizonyítható egyenlőtlenség segítségével lehet felső határt kijelölni. Csakhogy ily módon kerülő utat kell tennünk. Könnyű fogással most már v -ről kimutatható, hogy reá a variatio-számítás szabályai alkalmazhatók, a mi azután U -ra is áll.

Felesleges e felfedezésnek nagy horderejét külön kiemelni, mert ezek a specziális DIRICHLET-problémáét messze felülmúlják. Nem csodálkozhatunk azon, hogy számos kutató most már a HILBERT-től megtört útra rátért. E helyen ezek közül fel kell említenünk LEVI-t, ZAREMBA-t, FUBINI-t, de mindenekelőtt RITZ-et, a ki mesterének, HILBERT-nek, több genialis eljárását felhasználván és így a rendes útról letérve a matematikai physika összes problémáinak megoldására alkalmazható numerikus számító módszert fejtett ki.

HILBERT módszerét legutóbb a conform ábrázolás kérdésére alkalmazta. Nem akarom részletesen elemezni idevágó értekezését, csak annak felemlítésére szorítkozom, hogy módszert nyújt, melynek segítségével ez az ábrázolás végtelen sok görbétől határolt vagy egyszerűen összefüggő végtelen sok levelű RIEMANN-felületen elvégezhető. Ezzel tehát az analitikai függvények uniformisatiójának új megoldását adta.

Vegyesek.

Miután szemlét tartottunk HILBERT ama tanulmányainak tárgyai felett, a melyekkel maradandó nyomokat hagyott hátra, azok felett, a melyekhez ő is bizonyos előszeretettel ismételtén visszatért, jeleznünk kell még oly problémákat is, melyekkel csak alkalmilag foglalkozott a nélkül, hogy hosszasan időzött volna mellettük. Azt hiszem, hogy itt csak a legszembetűnőbb eredményeinek felsorolására szorítkozhatom.

Ha a binär, ternär, biquadrátikus alakoktól, valamint bárhány határozatlan quadrátikus alakjaitól eltekintünk, semelyik más alak nem állítható elő, mint végezzámú alaknak négyzetéből alakított összeg.

A zérus genushoz tartozó diophanthosi egyenletek egész számú megoldásainak meghatározására elemi eljárást állapított meg.

Ha valamely racionális egész függvény, mely több változót és még ezeken kívül több parametert is tartalmaz, e paraméterek határozatlan értékei mellett irreducibilis, akkor e paraméterek helyébe mindig helyettesíthetők egész számú értékek úgy, hogy a racionális egész függvény ezután is irreducibilis maradjon.

Ebből következtethető, hogy mindig léteznek oly egész együtthatós algebrai egyenletek, melyeknek GALOIS-csoportja előre megadott csoporttal azonos.

DEDEKIND-nek, a szorzás commutativ törvényét követő hypercomplex szám, elméletében szereplő ok alaptételét, HILBERT egy,

az invariánsok elméletében tőle levezetett lemma alapján a legnagyobb könnyűséggel bizonyítja be.

Arról a diophanthosi egyenletről, melyet úgy kapunk, hogy valamely n -edfokú algebrai egyenlet discriminansát 1-el teszszük egyenlővé, kimutatta, hogy a racionális számokban mindig, egész számokban pedig csak az $n=2, 3$ esetekben oldható meg.

Kimutatja, hogy a valós negyedrendű felületek bizonyos logikailag elképzelhető alakjai a valóságban nem léteznek. Így pl. nincsen közöttük olyan, mely 12 egyszerűen összefüggő zárt felületből volna összetéve, valamint nincsen egy darabból álló olyan sem, a melyben 12 lyuk fordul elő.

Conclusio.

E kifejtések után hosszú commentár felesleges. Láttuk, mily változatosak HILBERT kutatásai és mekkora problémáinak fontossága. Jeleztük módszereinek egyszerűségét és eleganciáját, kifejtéseinek világosságát és az abszolút szigorúságról való gondoskodását. A szigorúságra való törekvés gyakran azzal a kockázattal jár, hogy hosszadalmasakká leszünk, a mivel végül sem fizetjük meg túldrágán azt, a mi nélkül a matematika értékét teljesen elveszítené. De HILBERT szigorúsága mellett is el tudta kerülni a hosszadalmasságokat, a melyekkel olvasóinak terhére eshetett volna, a kik sohasem veszítik el azt a vezérfonalat, mely őt magát irányította. Mindig könnyűséggel fel lehet ismerni, hogy mely eszme-lánczolat vezette őt problémáira és azok megoldására. És bár ő a szó közönséges értelmében inkább analytista mint geometra, mégis — úgyszólván — egy szempillantással átlátja tárgyának egészét, még mielőtt részleteit megkülönböztette volna és ez az áttekintése olvasóinak is előnyére válik.

HILBERT a matematikai tudomány fejlődésére végül nemcsak saját munkáival gyakorolt jelentékeny befolyást, hanem tanításával, tanítványainak adott tanácsaival is, a kik ezen a

réven a maguk részéről is hozzájárultak, hogy a mesterüktől megteremtett módszerek felhasználásával ismereteinket fejleszszék.

Azt hiszem, nem szükséges többet mondanom annak igazolására, hogy a bizottság egyhangúlag hozott határozatával az 1905—1910. időszakra eső Bolyai-jutalomnak odaitélésére HILBERT-et hozza javaslatba.

Henri Poincaré.

A HOLD-MOZGÁS VARIÁCZIOJA.

(Első közlemény.)

I. A Hold-mozgás első közelítésben a három test problémájának specziális esete.

Az égi mechanika egyik legfontosabb feladata a Naprendszer alkotó égitestek mozgásának tanulmányozása a NEWTON-féle törvény alapján. Ebben az alakban a feladat, a melyet meg kell oldani: a mozgás egyenleteiből előállítani a Naprendszer alkotó kis és nagy bolygók és az utóbbiak holdjainak mozgását olyképpen, hogy azt a megfigyelésekkel össze lehessen hasonlítani. Ez az összehasonlítás van hivatva eldönteni, hogy a NEWTON-féle törvény mennyiben érvényes. Ha az elmélet-adta értékek mindenkor megegyeznek a megfigyelés adataival a megfigyelés hibáinak határain belül, akkor azt fogjuk mondani, hogy a NEWTON-féle törvény érvényes. A vizsgálatok lehetnek tisztán elméleti irányúak is, vagy vonatkozhatnak oly esetekre, melyek nincsenek megadva a természetben. Ilyféle kutatások célja lehet a NEWTON-féle törvény végső konzekvenciáit levonni, bizonyos integrálok általános sajátosságait megismerni, tanulmányozni az égitestek egy adott rendszerének mozgásbeli stabilitását, az égitestek alakját s ennek deformációit s i. t.

Föltételezzük az EUKLIDES-féle tért és ebben oly derékszögű koordinátarendszer lehetőségét, a melyre nézve igazak NEWTON mozgás-axiómái, nevezetesen, hogy e rendszerre vonatkoztatva a magára hagyott test, a melyre semmiféle külső erő nem hat, vagy nyugalomban van, vagy egyenesvonalú pályát ír le

egyenletes sebességgel. Közelebből még azt is föl kell tennünk, hogy e koordinátarendszer ezt a sajátságát akkor is megtartja, ha kezdőpontját a Napba vagy valamelyik bolygóba helyezzük.

A Nap, a bolygók és a holdak a tér határolt részét elfoglaló tömegek. Legyen dm_i és dm_k két égitestnek egy-egy tömegeleme, $r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}$ e két tömegelemnek egymástól való távolsága, akkor a NEWTON-féle potenciál

$$\mathcal{Q}_{ik} = x^2 \iint \frac{dm_i dm_k}{r_{ik}},$$

a hol az integráció a két égitest egész tömegére kiterjesztendő. Ha n égitesttel van dolgunk, akkor a mozgásegyenletek ennél fogva

$$m_j x_j'' = \frac{\partial \Sigma \mathcal{Q}_{ik}}{\partial x_j}, \quad \begin{matrix} (j=1, 2, \dots, n) \\ (i=1, 2, \dots, n-1) \end{matrix}$$

$$m_j y_j'' = \frac{\partial \Sigma \mathcal{Q}_{ik}}{\partial y_j}, \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, n) \\ (i \neq k) \end{matrix}$$

$$m_j z_j'' = \frac{\partial \Sigma \mathcal{Q}_{ik}}{\partial z_j}.$$

Ebben az alakban a feladat határozatlan; mert, hogy \mathcal{Q} -t kiszámíthassuk, ismernünk kell az égitestek alakját és a tömeg belső eloszlását, ezek viszont egyenként függenek valamennyi többi égitest alakjától és tömegeloszlásától, azonkívül az alak folyton változik, ha az égitest nem végtelenül merev. Ha az égitestek dimenzióikhoz képest igen távol vannak egymástól, úgy föltételezhetjük, hogy teljesen indeformábilis homogén vagy homogén koncentrikus rétegekből álló gömbök s akkor, mint az elemekből ismeretes, egyszerűen

$$\mathcal{Q}_{ik} = x^2 \frac{m_i m_k}{r_{ik}},$$

hol r_{ik} a gömbök középpontjainak egymástól való távolsága, x^2 pedig a GAUSS-féle állandó, mely az egységek kellő megválasztásával egyenlővé tehető 1-gyel. Legyen még

$$\mathcal{Q} = \Sigma \mathcal{Q}_{ik},$$

akkor a mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} m_j x_j'' &= \frac{\partial Q}{\partial x_j}, \\ m_j y_j'' &= \frac{\partial Q}{\partial y_j}, \\ m_j z_j'' &= \frac{\partial Q}{\partial z_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ha $n=2$, akkor a GAUSS-féle állandót egynek véve

$$Q = \frac{m_1 m_2}{r_{12}},$$

s előáll az előbbi egyenletek legegyszerűbb alakja, a két test problémája. Ezeket az egyenleteket szigorúan meg lehet oldani. A megoldás adja az ismeretes elliptikus, parabolikus, hyperbolikus, kör, vagy egyenesben való mozgást a szerint, a mint az integráció-állandóknak különböző értékeket tulajdonítunk. Mivel a Nap tömege a megfigyelések szerint a bolygók tömegét sokszorosán túlhaladja, a két test problémájából nyert bolygópályák bizonyos mértékben megközelítik a valóságos pályákat, ha mindenkor a Napot vesszük az egyik testnek.

Nagyobb megközelítést fogunk elérni, ha a Napon kívül két égitestet veszünk tekintetbe, például a Földet és Vénust, vagy a Földet és a Holdat. Ebben az esetben $n=3$ és

$$Q = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}. \quad (2)$$

A mozgásegyenleteket az (1) csoport adja, hol $j=1, 2, 3$. Az összesen 9 másodrendű differenciálegyenletből álló szimultán rendszer alkotja a három test problémáját. Megoldásuk megadná a három égitest tömegközéppontjainak mozgását. A rendszernek 18 integrálja közül eddig 10 ismeretes: 6 súlypont-integrál, 3 felületintegrál és az eleven erő integrálja. A hiányzó 8 integrál előállítására irányult minden fáradozás eddig eredménytelen maradt és így a bolygók és holdak pályáit csak közelítő módszerekkel lehet előállítani még ebben az egyszerű

esetben is, midőn a Napon és egy bolygón kívül még csak egyetlen másik ú. n. perturbáló bolygóra vagyunk tekintettel. BRUNS kimutatta,¹ hogy a klasszikus integrálokon kívül más független algebrai integrálok nem léteznek a három test problémájában. BRUNSNak ezt a tételét PAINLEVÉ² oda általánosította, hogy az n test problémájának minden integrálja, mely a sebességeket algebrailag tartalmazza, a klasszikus integrálok kombinációja. POINCARÉ pedig bebizonyította,³ hogy a három test problémájában az ismert integrálokon kívül más uniformis integrál sem létezik, végül PAINLEVÉ kimutatta,⁴ hogy nem létezik több integrál, a mely a sebességekre nézve egyértékű s analitikai. Ezek a nagyfontosságú eredmények mutatják, hogy szükségképpen közelítő módszerekre kell szorítkoznunk. Háromnál több test esetében extenzíve nagy nehézségek tornyosulnak a tárgyalás elé, az elvi nehézségek nem különböznek a három test problémájától.

Első közelítésben tehát a Hold-mozgás tanulmányozásánál is a három test problémájából kell kiindulnunk. A Holdon kívül azt a két égitestet kell elsősorban tekintetbe vennünk, melyek mozgására a legnagyobb mértékben befolyással vannak s ezek a Föld, mely a Holdhoz a legközelebb van és a Nap, melynek tömege igen nagy.

Mivel csak relativ mozgásokat észlelhetünk, a koordináta-rendszer kezdőpontját az m_i testek valamelyikébe kell helyeznünk. A bolygók esetében ez a kezdőpont a Nap lesz. A tapasztalás mutatja, hogy a bolygók középtávolságai (a Naptól) majdnem állandóak és hogy excentricitásaik igen kicsinyek. Mivel a tárgyalás folyamán oly sorkifejtések válnak szükségessé, melyek a két égitest középtávolságainak viszonya szerint haladnak, következik, hogy a bolygóknál a Naptól számított

¹ Berichte der königl. Sächsischen Ges. d. Wiss. 1887; Acta Mathematica XI.

² Bulletin Astronomique XV.

³ Acta Mathematica XIII; Méthodes nouvelles I. kötet, 250. l.

⁴ Comptes Rendus CXXX (1900), 1699. l.

középtávolságok viszonya szerint lehet és kell sorba fejteni, azaz a koordinátarendszer kezdőpontját a Nap tömegközéppontjába helyezzük. A Hold ellenben hol közelebb, hol távolabb van a Naptól mint a Föld és úgy az említett sorbafejtés nem lenne lehetséges, ha a rendszer kezdőpontját a Napba helyeznők. Ellenben a Földhöz a Hold mindig mintegy 390-szer közelebb van, mint a Nap és így a koordinátarendszer kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába helyezzük, más szóval keressük a Hold tömegközéppontjának mozgását a Föld tömegközéppontjában elhelyezett megfigyelőre vonatkoztatva, a Nap perturbáló hatásának tekintetbe vételével. Itt áll be az a lényeges különbség, mely a bolygó-theóriák és a Hold-elmélet között fennáll. A bolygók tömegei igen kicsinyek a Nap tömegéhez képest és így a perturbáló tömeg hatványai szerint is sorba fejthetünk. A Hold-mozgás esetében a Nap a perturbáló tömeg, mely a Hold tömegénél több százezerszer nagyobb és így ez a sorkifejtés nem lehetséges.

Az ebből támadt nehézségek leküzdésére irányult törekvések történetét NEWCOMB ismertette¹ legutóbb a római matematikus-kongresszuson. A Hold-mozgás elméletében a legjelentősebb haladást kétségkívül G. W. HILLnek köszöni az égi mechanika. HILL alapvető munkái, melyek e tárgyra vonatkoznak: «Researches in the Lunar Theory»; Amer. Journ. of Mathem. 1878 és «On the part of the motion of the Lunar Perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon», Cambridge (Mass) 1877; Acta Mathem. VIII. Mindkét értekezés HILL összegyűjtött munkáinak I. kötetében.

E. W. BROWN 20-nál több értekezésben folytatta és befejezte azt a munkát, melyet HILL megkezdett. HILL t. i. azt vélte, hogy módszere nem lesz alkalmas a magasabb egyenlőtlen-ségek kifejtésére.² BROWN főbb értekezései az Amer. Journ. of

¹ Atti del IV. Congr. Intern. dei Matem. Roma, 1909, vol. I; fordítása a Mat. és Fiz. Lapokban 1909, 371. l.

² E nézetten volt TISSERAND is: Traité de Méc. Céleste, III. 285. lap.

Mathem. XIV., XV., XVII. köteteiben, a *Memoirs of the Royal Astron. Soc.* LIII., LIV., LVII. köteteiben s a *Monthly Notices*-ekben jelentek meg. POINCARÉ a «*Méthodes nouvelles*»-ekben HILL eszméjéből kiindulva építi fel a periodikus megoldások elméletét, a «*Leçons de méc. cél.*» II. kötetében pedig a HILL-BROWN-féle elméletet veszi tárgyalása alapjául. A HILL nyomán támadt vizsgálatok sorába tartozik G. H. DARWIN «*On periodic orbits*» című értekezése is.¹

Az (1) egyenletcsoportot a kezdőpont eltolásával úgy transzformáljuk, hogy a kezdőpont a három égitest egyikének tömegközéppontjával essék össze. Ennek tömege legyen m_0 , a másik kettőé m_1 és m_2 , koordinátáik $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$. A transzformáció eredményét a következő alakban írhatjuk:

[illegible]

Legyen m_0 a Föld, m_1 a Hold, m_2 a Nap tömege. Mivel m_1 az m_2 mellett szinte elenyészően kicsiny, az x_2, y_2, z_2 mozgásegyenleteiben a jobb oldalt el lehet hanyagolni, a mi más szóval annyit tesz, hogy a Nap pályáját elliptikusnak tekintjük. Azt a síkot, melyben e pálya fekszik, veszszűk xy síknak. Ez a sík az ekliptika. Mivel a Nap pályáját KEPLER-féle ellip-

¹ Acta Mathematica XXI (1897).

szisnek tekintjük, implicite felteszszük, hogy az ekliptika helyzete változatlan, vagyis a már említett elhanyagolásokon kívül elhagyjuk az ekliptika változásától előálló tagokat is. Mivel most $z_2=0$, x_2 és y_2 elemi módon előállíthatók mint az idő, a Nappálya fél nagytengelyének és excentricitásának függvényei. Ezeket be kell helyettesíteni (3)-ban az $x_1y_1z_1$ mozgásegyenleteibe, melyek e szerint az időt explicite is tartalmazni fogják, a miből viszont következik, hogy nem lesz meg a közöséges energia-integráljuk.

Látjuk, hogy az $x_1y_1z_1$ mozgásegyenleteiben a jobb oldalon levő tagot nem lehet elhanyagolni, mivel m_2 igen nagy. Más szóval a Hold relativ pályája a Föld körül még első közelítésben sem tekinthető ellipszisnek — vagy GYLDÉN¹ terminológiája szerint — az ellipszis nem alkalmas intermediáris pályának.

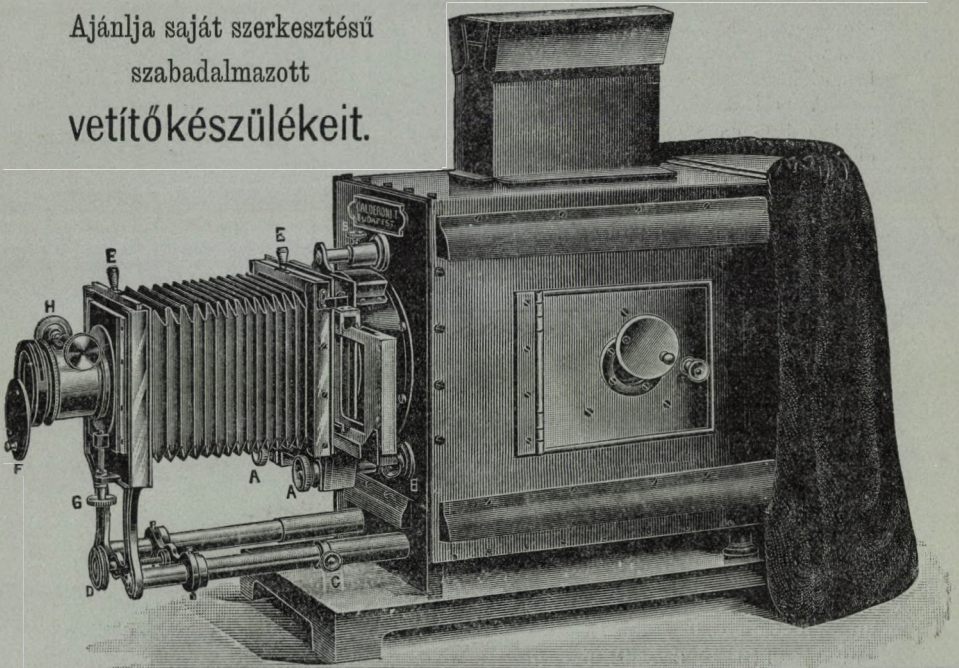
Wodetzky József.

¹ GYLDÉN: Die intermediäre Bahn des Mondes. Acta Mathem. VII; Astron. Nachr. Nr. 2383.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésű
szabadalmazott
vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni B»

Ezen készülék lámpa-szekerénye legjobb minőségű aczélemezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágítólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrométer-csavarral és tolószerezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektívet tartó előrész egy mikrométer-csavar segítségével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bárszonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül*

K 260.—

GÁTI-féle barretter. Csak középiskolák részére egy platina-barretter állvánnyal **20 korona**. Bővebb leírással és a barretterre vonatkozó cikkek különlenyomatával Magyarország részére szívesen szolgál **Gáti Béla, Budapest, VII., Damjanich-utca 37.** A Gáti-barrettert Németországban Hans Boas, Berlin, Krautstrasse 52., Angliában Robt W. Paul, New-Southgate, London N., Franciaországban Zivy et Co, Boulevard Magenta 28. Paris, Oroszországban O. Richter pers. de l'amirauté No 4. St. Petersbourg, képviseli. A legáltalánosabb és legelterjedtebb váltakozó áramú mérőeszköz és demonstrációs készülék a gyenge áramú elektrotechnikában s e mellett a legmodernebb és legolcsóbb is.

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetítő készülékünket a legtökéletesebb illyenmű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyújtávolságu vetítési objektivet lehet elhelyezni, melynek gyújtávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

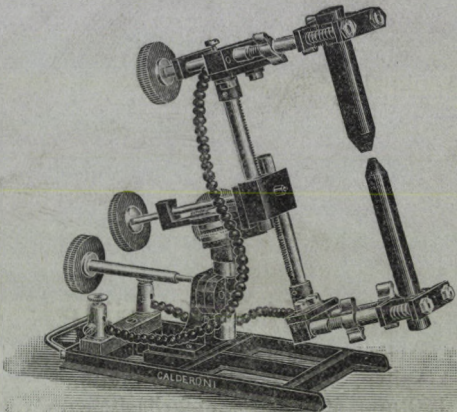
Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tűnemények, fényelhajlási, fénycsarkítási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközkörről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, méshfényvel, acetylénnel, borszesz-izzófényvel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. Ára K 90.—



Borszesz-izzófénylámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertya-fény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legegyszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.



50255

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ és RADOS GUSZTÁV

HUSZADIK ÉVFOLYAM

II—III. FÜZET

1911

FEBRUÁRIUS—MÁRCZIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1911.



TARTALOM.

	Lap
GROSSCHMID LAJOS: A négyzetes binóm-kongruenciák gyökeiről... ---	47
DIENES VALÉRIA és DIENES PÁL: Analitikai függvények algebrai és logaritmikus szingularitásairól (Első közlemény.) ---	73
DÁVID LAJOS: A medium arithmetico-geometricumról ---	98
WODETZKY JÓZSEF: A hold-mozgás variációja (Második és befejező közlemény.)	106
RYBÁR ISTVÁN: A lanthán és a kobalt spektrálvonalainak Zeemann-effektusáról (Első közlemény.) ---	128

A Matematikai és Fizikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszadik társulati év 1911 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiun tanár (VI., Nagy János-utca 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első és harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy matematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utca 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (cikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a matematikai tárgyuak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyuak pedig *Kövesligethy R.* czime alatt. A reclamatiók, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

A reclamatiók, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

A NÉGYZETES BINÓM-KONGRUENCIÁK GYÖKEIRŐL.

Bevezetés.

Ebben a dolgozatomban bemutatandó vizsgálataimnak kiinduló pontja a következő kérdéstétel:

Adva lévén a legáltalánosabb $x^2 \equiv r \pmod{2^k M}$ quadratikus binóm-kongruencia, meghatározandó a tetszésszerint megadott $2^k M$ modulusnak és e modulus tetszésszerinti quadratikus maradékának, r -nek oly expliczit számelméleti függvénye, a mely a kérdéses kongruencia összes modulo $2^k M$ inkongruens raczionális egész gyökeit megadja.

A kérdést az így fogalmazott legáltalánosabb értelemben sikerült is elintézni s a keresett megoldásokra oly általános és egységes alakot megállapítanom, a mely valóban expliczit, ha elfogadjuk, azaz feltételezzük, hogy valamely raczionális egész szám megadásával ismeretes egyszersmind annak törzstényező s illetve törzsideális előállítása is, a raczionális számkörben s illetve adott quadratikus számtestben. Nagyon természetes, hogy az úgynevezett multiplikativ számelmélet elvei szempontjából ez a feltevés egészen jogosult; a mennyiben itt a mindenkori egyértelmű törzselőállítás közvetlenül s teljességgel jellemez minden egész számot, úgy annyira, hogy tulajdonképen a tartománybeli egész számok összességét, mint a törzsszámok s illetőleg törzsideálok hatványszorzatainak összességét kell felfognunk. Mindazonáltal tagadhatatlan, hogy konkrét esetekben a részletezett feltevésnek valójában soha sincs elég téve, sem a raczionális egész számok, még kevésbé a másodfokú algebrai egész számok tartományában, mely utóbbiban tudvalévően, az a priori a számmal együtt ismere-

tesnek supponált törzsideálos felbontás tényleges előállítása másodfokú kongruenciák gyökeinek ismeretét kívánja, a mely gyökök számítását viszont e felbontásokra vezettem vissza. Más oldalról ez a kölcsönösség a gyökök és a modulus törzsideáljainak egymástól való függésében természetszerű kifolyása a minden vonatkozásban érvényesíteni kívánt multiplikativ előállítás módszereinek.

Mindezek alapján világos, hogy a talált expliczit gyökfelírások úgy is értelmezhetők, mint a melyek megoldásai egy sajátlagos számelméleti függvény-megfordítási kérdésnek. Nevezetesen, a míg egy részről valamely quadratikus test összes törzsideáljai ismeretessé válnak a négyzetes kongruenciák egy sorozatának gyökeiből, addig másrésztől közlendő eredményeim mutatják, hogy a quadratikus testek törzsideáljainak ismerete módot nyújt minden négyzetes binóm-kongruencia gyökeinek expliczit felírására.

A dolgozatot két főrésze szétválasztottam. Követve vizsgálataim időrendi s fejlődési egymásutánját, az első részben tárgyalom az $x^2 \equiv 1 \pmod{2^k M}$ típust, mint a mely a raczionális számkör eszközeivel elintézhető, s az általános gondolatmenetet mégis csaknem minden lényeges részében kidomborítja. A második részben fejtegetem az általános esetet s megállapítom a következő, minden specialitást magában foglaló tényt:

Ha $2^k M = 2^k \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ tetszőszerinti raczionális egész szám és r e számhoz képest relativ törzsszám és e számnak quadratikus maradéka, akkor az

$$x^2 \equiv r \pmod{2^k M}$$

kongruencia összes raczionális egész gyökei az

$$\bar{x}_g \equiv \varepsilon \left\{ (2^k)^{\varphi(M)} [q \sqrt{r_0} (\gamma_h^{\varphi(\mathbb{P}_h)} - \gamma_h'^{\varphi(\mathbb{P}_h)}) - \nu] + \nu \right\} \pmod{2^k M}$$

$$(\varepsilon = \pm 1; h=1, 2, \dots, 2^{n-1}; g=1, 2, \dots, 2^n \sigma)$$

képletből folynak, a melyben σ az

$$x^2 \equiv r \pmod{2^k}$$

különböző gyökeinek számát jelenti, ν helyébe pedig rendre e kongruencia összes gyökei teendők, míg \mathfrak{P}_h az $\mathfrak{o}M$ főideál összes oly

$$\mathfrak{o}M = \mathfrak{P}_h \cdot \mathfrak{P}'_h \\ (h=1, 2, \dots, 2^{n-1})$$

felbontásaiból veendő, a melyekben \mathfrak{P}_h az M raczionális törzstényezői mindegyikének egy-egy törzsideal tényezőjét magában foglalja, a $\sqrt{r_0} = \theta$ -ból származó quadratikus testből, a hol $r \equiv q^2 r_0 \pmod{M}$, $r_0 \equiv 2 \pmod{4}$; végül γ_h és γ'_h az $\mathfrak{o} = [1, \theta]$ oly egész számai, a melyekre nézve $\nu \gamma_h$ osztható \mathfrak{P}_h -val és relativ törzsideal \mathfrak{P}'_h -höz, $\nu \gamma'_h$ pedig osztható \mathfrak{P}'_h -el és relativ törzsideal \mathfrak{P}_h -hoz.

ELSŐ RÉSZ.

Az $x^2 \equiv 1$ modulo M kongruencia gyökei.

1.

Ismeretes az úgynevezett általános kis FERMAT-féle tétel, a mely szerint, ha $(a, b) = 1$, akkor

$$a^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b} \quad \text{avagy} \quad b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{a} \quad (\text{I})$$

(I) kongruenciákból foly

$$[a^{\varphi(b)} - 1][b^{\varphi(a)} - 1] \equiv -[a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)}] + 1 \equiv 0 \pmod{ab},$$

azaz

$$\Psi(a, b) = a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}. \quad (\text{II})$$

Már most legyen

$$\Phi(a, b) = a^{\varphi(b)} - b^{\varphi(a)} \quad (\alpha)$$

(II) és (α) egybevetéséből egyszerre adódnak a következő relációk:

$$\Psi(a, b) = \Psi(b, a), \quad (1)$$

$$\Phi(a, b) = -\Phi(b, a), \quad (2)$$

$$\Psi(a, b) + \Phi(a, b) = 2 \cdot a^{\varphi(b)}, \quad (3)$$

$$\Psi(a, b) + \Phi(b, a) = \Psi(a, b) - \Phi(a, b) = 2 \cdot b^{\varphi(a)}, \quad (4)$$

(II)-ből nyerem

$$[\Psi(a, b)]^2 = a^{2\varphi(b)} + b^{2\varphi(a)} + 2a^{\varphi(b)} \cdot b^{\varphi(a)} \equiv \\ \equiv a^{2\varphi(b)} + b^{2\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}, \quad (\text{II}^*)$$

melyre való tekintettel (a) adja

$$\begin{aligned} [\Phi(a, b)]^2 &= a^{2q(b)} + b^{2q(a)} - 2a^{q(b)} \cdot b^{q(a)} \equiv \\ &\equiv a^{2q(b)} + b^{2q(a)} \equiv 1 \pmod{ab}. \end{aligned} \quad (\text{II}^{**})$$

2.

Ezeket az elemi megjegyzéseket előrebocsájtván; legyen M valamely tetszősszerinti összetett páratlan pozitív egész szám, azaz $M = \prod_1^r p_i^{a_i}$, hol a p -k páratlan törzsszámok, míg az a -k tetszősszerinti pozitív egész számok.

Vizsgáljuk most az

$$x^2 \equiv 1 \pmod{M} \quad (A)$$

kongruenciát. Mindenekelőtt világos lévén, hogy ha γ e kongruenciának gyöke, akkor $-\gamma$ is az; azért is, ha e kongruencia gyökeiről szólok, úgy elegendő, ha a gyökök abszolút értékeit veszem csupán figyelembe; nem azért, mintha γ és $-\gamma$ modulo M æquivalensek volnának, mert hiszen $\gamma \not\equiv -\gamma \pmod{M}$, hanem, mert ha γ és $-\gamma$ közül az egyiket ismerem, akkor a párját is nyomban kapom a jelváltással. Evidens továbbá, hogy (A) -nak 2 gyöke mindig van; ezek: ± 1 .

Már most azt állítom, hogy az M -re tett feltevések mellett (A) -nak összes, abszolút értékben különböző, azaz modulo M inkongruens gyökeit megadja a fentebb, 1. cikkben bevezettem Φ függvény. És pedig, ha g az M összes oly különböző felbontásainak száma, a melyek bármely kettejére nézve

$$a_i b_i = a_k b_k = M, \quad (\beta)$$

$$a_i \not\equiv a_k; \quad a_i \not\equiv b_k; \quad b_i \not\equiv b_k \quad (\beta^*)$$

és

$$(a_i, b_i) = (a_k, b_k) = 1, \quad (\gamma)$$

akkor az összes, fönti értelemben különböző gyökei (A) -nak:

$$\begin{aligned} x_i &\equiv \Phi(a_i, b_i) \pmod{M} \\ (i=1, 2, \dots, g) \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Mely g számú gyökhöz hozzávéve a megfelelő ellentett jelű

gyököket; végeredményben az (A) valamennyi modulo M inkongruens gyökeinek a száma lesz:

$$G = 2 \cdot g = 2^r. \quad (\delta)$$

Ennek az állításomnak igazolására, szükséges és egyben elegendő kimutatnom a következőket:

$$a) \quad [\Phi(a_k, b_k)]^2 \equiv 1 \pmod{M};$$

$$(k=1, 2, \dots, 2^{r-1})$$

b) tetszésszerűen két különböző k, j számra az $1, 2, \dots, g$ sorozatból, sohasem lehet

$$\Phi(a_k, b_k) \equiv \pm \Phi(a_j, b_j) \pmod{M};$$

c) az így nyert G számú gyöknél (A) -nak több megoldása nem létezhet; a melyre nézve — ha ez r — nem volna: $\gamma \equiv \pm x_k \pmod{M}$, hol x_k egy gyök a (III) sorozatból.

Mielőtt azonban e dolgokat elintézném, megmutatom, hogyan nyerjük g -t lehető egyszerű úton. Mindenekelőtt világos, hogy ha arról van szó, hogy $M = \prod_1^r p_i^{a_i}$ hányféleképpen bontható fel a kívánt modorban; azaz $M = a \cdot b$, hol $(a, b) = 1$; akkor itt az a exponensek értéksora lényegtelen szerepet játszik; miért is mindjárt vehetem M helyett $m = \prod_1^r p_i$ -t, mint a melyre a g ugyanaz lesz.

Legyen először $r = 2k + 1$, akkor

$$g = \binom{2k+1}{0} + \binom{2k+1}{1} + \dots + \binom{2k+1}{k};$$

minthogy pedig

$$2^{2k+1} = 2g, \quad \text{azért} \quad g = 2^{2k} = 2^{r-1}, \quad q. e. d.$$

Ha pedig $r = 2k$, akkor

$$g = \binom{2k}{0} + \binom{2k}{1} + \dots + \binom{2k}{k-1} + \frac{1}{2} \cdot \binom{2k}{k} = K + \frac{1}{2} \binom{2k}{k},$$

de ismét

$$2^{2k} = 2K + 2 \cdot \frac{1}{2} \binom{2k}{k} = 2g, \quad \text{azaz} \quad g = 2^{2k-1} = 2^{r-1}, \quad q. e. d.$$

3.

A 2. cikkben foglalt a) állítást nem kell bizonyítanom. Ez önmagában világos 1. (II**) alapján, tekintettel 2. (β) , (γ) -ra.

2. b)-t a következőképen bizonyítom: legyen igaz b) állításom ellenkezője, azaz például

$$\Phi(a_k, b_k) \equiv \Phi(a_j, b_j) \pmod{M};$$

más oldalról 1. (II)-ből tudom, hogy

$$\Psi(a_k, b_k) \equiv \Psi(a_j, b_j) \equiv 1 \pmod{M},$$

tehát 1. (3) alapján összegezéssel

$$2 \cdot a_k^{\Psi(b_k)} \equiv 2 \cdot a_j^{\Psi(b_j)} \pmod{M}$$

és innen à fortiori

$$a_k^{\Psi(b_k)} \equiv 0 \pmod{a_j},$$

továbbá ugyancsak

$$a_j^{\Psi(b_j)} \equiv 0 \pmod{a_k};$$

vagyis a_k -ban a_j összes különböző törzstényezői és csakis ezek szerepelhetnek, s viszont természetesen: 2. (β^*) , (γ) ellenére. Hasonló szellemben megy a dolog, ha teszem

$$\Phi(a_k, b_k) \equiv \Phi(b_j, a_j) \pmod{M}$$

ekkor ugyancsak 1. (II), (3), (4) hozzávonásával

$$2 \cdot a_k^{\Psi(b_k)} \equiv 2 \cdot b_j^{\Psi(a_j)} \pmod{M}$$

és à fortiori

$$a_k^{\Psi(b_k)} \equiv 0 \pmod{b_j}$$

és

$$b_j^{\Psi(a_j)} \equiv 0 \pmod{a_k},$$

azaz a_k és b_j összes törzstényezői megegyezők; tehát 2. (β) , (γ) alapján $a_k = b_j$ és $a_j = b_k$, vagyis az $a_k \cdot b_k$, $a_j \cdot b_j$ felbontások nem különböznek, feltevésünk ellenére. Tehát, etc.; *q. e. d.*

Ha éppen például $a_j = 1$, akkor $a_k \neq 1$ és $1 \equiv 0 \pmod{a_k}$, a mi lehetetlenség; ugyanígy, ha például $b_j = 1$.

Végül *c)* állításom helyessége kiviláglik a következő elemi okoskodásból: (A) -ból irhatom, hogy $\frac{(x+1)(x-1)}{M} = \text{egész szám}$; minthogy azonban $(x+1, x-1)=1$, vagy $(x+1, x-1)=2$; világos, hogy az $(x+1)(x-1)$ szorzat M -mel csakis akkor lehet osztható, ha x olyan, hogy $x+1$ osztható a -val, míg ugyanakkor $x-1$ b -vel (és tehát simultán $-x+1$ b -vel, $-x-1$ a -val), vagy megfordítva; hol is $(a, b)=1$ és $a \cdot b=M$; vagyis tehát a gyökök számának maximuma pontosan G ; *q. e. d.*

Világos, hogy abból, hogy G a *lehető maximum*, még semmi módon be nem látható, hogy a gyökök száma minden esetben tényleg ez a maximum lesz; e legutóbbi körülmény kidomborítására kellene épen az *a), b)* bizonyítások.

4.

Mielőtt a legáltalánosabb, tehát $2^k \cdot M$ alakú modulusra vizsgálnám az (A) kongruenciát; csak rövidesen idézem azokat a jól ismert eredményeket, a melyek a 2^k alakban jelentkező modulusra érvényesek.

Az

$$x^2 \equiv 1 \pmod{2^k} \quad (A')$$

kongruenciának van *egy* gyöke, ha $k=1$ és pedig $+1 \equiv -1 \pmod{2}$; van *két* gyöke, ha $k=2$ és pedig ± 1 ; van *négy* gyöke, ha $k \geq 3$ és pedig valamennyien bennfoglalvák a

$$\gamma \equiv \pm 1 + \varepsilon \cdot 2^{k-1} \pmod{2^k} \quad (a)$$

kongruenciában; hol is $\varepsilon=0, +1$.¹

5.

Legyen már most legáltalánosabban

$$x^2 \equiv 1 \pmod{2^k M}, \quad (B)$$

¹ V. ö. pl. L. KRONECKER (K. HENSEL): Vorlesungen über Zahlentheorie, I. Band, 128—129. old. B. G. Teubner, Leipzig, 1901. Az (A') típusú legáltalánosabb kongruenciára teljesen analóg tétel érvényes. L. pl. P. G. L. DIRICHLET—R. DEDEKIND: Vorlesungen über Zahlentheorie § 36. IV. Aufl. Fr. Vieweg & Sohn. Braunschweig, 1894.

hol természetesen M még mindig a 2. cikkben részleteztem alakkal bír.

a) Lássuk mindenekelőtt a $k=1$ esetet és pedig az

$$x^2 \equiv 1 \pmod{2M} \quad (B_1)$$

kongruenciát.

Ha teszem $M = a \cdot b$, hol miként eddig is $(a, b) = 1$, akkor szintén $(2a, b) = 1$, azaz (II**) alapján $\gamma \equiv \pm \phi(2a, b) \pmod{2M}$ (B_1) -nek megoldása. Más oldalról azonban $\phi(2a, b)$ páratlan szám lévén, úgy $\gamma+1$, mint $\gamma-1$ párosak s így bizonyos, hogy ha például $\gamma \pm 1$ $2a$ -val, míg ugyanakkor $\gamma \mp 1$ b -vel osztható, tudom, hogy szintén $\gamma \pm 1$ a -val és ugyancsak $\gamma \mp 1$ $2b$ -vel osztható leend; vagyis tehát más szavakkal: a $(2a) \cdot b$ és $(2b) \cdot a$ felbontások lényegben, azaz jeltől eltekintve, (B_1) -nek ugyanazt a gyökét adják. És tényleg: látom, hogy

$$(2^{\phi(b)} - 1) a^{\phi(b)} + (2^{\phi(a)} - 1) b^{\phi(a)} \equiv 0 \pmod{2M},$$

mert hiszen a bal oldal kifejezése M -mel osztható (I) alapján és ugyancsak 2-vel; a mennyiben — mint két páratlan mennyiség összege — bizonyosan páros; tehát $(2M)$ -mel is, *q. e. d.* Innen pedig, közvetlen nyerem; figyelemmel, hogy $\varphi(a) = \phi(2a)$ és $\varphi(b) = \phi(2b)$:

$$[(2a)^{\phi(b)} - b^{\phi(2a)}] + [(2b)^{\phi(a)} - a^{\phi(2b)}] \equiv 0 \pmod{2M},$$

azaz

$$\pm \phi(2a, b) \equiv \mp \phi(2b, a) \equiv \pm \phi(a, 2b) \pmod{2M} \quad (b)$$

q. e. d.

Hogy ha már most $2M$ -ben a kettőst egy pillanatra törzsszám hatványával helyettesítve képzelem, akkor (δ) szerint a modulo $p^a M$ inkongruens gyökök száma $g' = 2^{r+1}$; ha pedig ismét $p^a (=) 2$ substitutiót végzem, úgy az előbbieniek értelmében minden gyököt kétszer vettem ilyenén módon számításba; vagyis $G = \frac{g'}{2} = 2^r$; azaz végeredményben (B_1) -nek ugyanannyi gyöke van, mint (A) -nak.

Mindez utóbbiak itt, jól ismert elemi vonatkozások,¹ a me-

¹ L. pl. L. KRONECKER: id. m. id. helyen.

lyeknek is a felemlítésével csupán rá akartam mutatni, hogy ez a kiváltságos eset hogyan illeszkedik fejtegetésem általános keretébe.

Mindezek után világos, hogy (B_1) gyökeinek felírását a következő methodus szerint végezhetem. Képezem M , 2^{r-1} számú, $a \cdot b$ alakú, $(a, b)=1$ összes felbontásait, valamennyire nézve megalkotom tetszésszerint vagy $\pm \phi(2a, b)$ -t vagy $\pm \phi(2b, a)$ -t. Így kaptam $2 \cdot 2^{r-1} = 2^r = G$ számú gyököt, összhangzásban a fönt mondottakkal.

$\beta)$ Most rátérek a $k=2$ esetre; ekkor tehát vizsgálandó az

$$x^2 \equiv 1 \pmod{4M} \quad (B_2)$$

kongruencia.

(B_2) fennállása maga után vonja a következő két kongruencia együttes fennállását:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{M}, \quad (B_{21})$$

$$x^2 \equiv 1 \pmod{4}. \quad (B_{22})$$

A 4. cikk értelmében (B_{22}) összes gyökei bennfoglalvák az $F_1 = \pm 1 + h \cdot 4$ formában; míg, ha $M = a \cdot b$ és $(a, b)=1$, akkor (B_{21}) egy bizonyos számosztályba tartozó, tehát mod. M kongruens valamennyi gyökét kimeríti a következő alak

$$F_2 = \phi(a, b) + f \cdot M.$$

Ha tehát F olyan formaérték, a melyet simultán reprezentál az F_1 és az F_2 , h -nak és f -nek adott speciális értékei mellett, akkor nyilván

$$F^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

vagyis az ilyen F (B_2) -nek megoldása. S viszont, F csakis akkor lehet (B_2) -nek megoldása, ha van olyan h, f értékpár, hogy

$$F = \pm 1 + h \cdot 4 = \phi(a, b) + f \cdot M. \quad (7)$$

Hogy pedig (7) fennálljon, ahhoz szükséges és elégséges, hogy vagy

$$\phi(a, b) + f \cdot M \equiv \eta \pmod{4} \quad (7_1)$$

vagy

$$\eta + h \cdot 4 \equiv \Phi(a, b) \pmod{M}, \quad (7_2)$$

hol mindenütt η oly szám, melynek értéke vagy $+1$, vagy -1 . Hogy (7_1) , (7_2) kongruenciák f -re, s illetőleg h -ra megoldhatók ismeretes; mert hiszen $(M, 4)=1$, honnan is még következik, hogy a megoldások valamennyien egyetlen számosztályba tartoznak, mod. 4 s illetőleg mod. M . (7_1) -nek elég van téve, ha

$$f \equiv [\eta - \Phi(a, b)] \cdot M \pmod{4},$$

(7_2) -nek pedig, ha

$$h \equiv [\Phi(a, b) - \eta] \cdot 4^{\varphi(M)-1} \equiv -[\eta - \Phi(a, b)] \cdot 4^{\varphi(M)-1} \pmod{M}.$$

Így tehát két *explicit* alakot nyertem (B_2) megoldásaira és pedig

$$F \equiv \eta + [\Phi(a, b) - \eta] \cdot 4^{\varphi(M)} \equiv \eta + [\Phi(a, b) - \eta] \cdot 2^{\varphi(4M)} \pmod{4M} \quad (8_1)$$

és

$$F' \equiv \Phi(a, b) + [\eta - \Phi(a, b)] M^2 \pmod{4M}, \quad (8_2)$$

mely formulákban Φ -re, sorban (B_{21}) összes gyökei helyettesítendők.

(8_1) s illetve (8_2) , (B_2) összes gyökeit kimerítik; ez világos a fentebbiek értelmében; kérdés most még, hogy az így nyert gyökök valamennyien mod. $4M$ hány számosztályba sorakoznak?

Feltéve, hogy minden különböző a, b felbontásra, (8_2) például különböző megoldásokat szolgáltat; tekintettel η kétértékűségére lesz $G=2^{r+1}$, vagyis ugyanannyi, mintha a modulusban tenném $4(=)p^a$, hol p páratlan törzsszám.

Más oldalról azonban világos, hogy ha a 4-et, mint p^a -t veszem tekintetbe, akkor a (III) függvénysorozat megalkotásával pontosan $g=2^{r+1}$ számú számalakot kapok (minden $+\Phi$ -hez t. i. nyomban véve $-\Phi$ -t is), a melyek (II*) szerint valamennyien gyökei (B_2) -nek; hogy pedig egymásközt mod. $4M$ inkongruensek, annak kimutatása a 2.-ben s illetve 5. a)-ban megejtetthez mindenben hasonló módon történhetik; miért

is ezt elhagyom. Tehát $G = g = 2^{r+1}$. Több gyök azonban nem lehet, mint arra fentebb már rámutattam.

Végeredményben tehát (B_2) gyökeinek felírásánál úgy járhatok el, mint (A) kongruencia esetében; csak hogy most M -hez, mint $(r+1)$ -ik tényezőt, hozzáveszem a $4 = 2^2$ -t.

Minthogy a mondottak értelmében akár (8_1) , akár (8_2) , a sorrendtől eltekintve szintén megadják (B_2) 2^{r+1} számú gyökét; azért is lényegben mindegy, hogy valamely konkrét esetben ezeket, avagy a $\Phi(4a, b)$ típust használjuk. Mindazonáltal — tekintve, hogy (8_1) , (8_2) -ben egyaránt csak $\Phi(a, b)$ a változó, mint a melynek a számítása $\Phi(4a, b)$ -énél határozottan kényelmesebb és továbbá, hogy úgy (8_1) mint (8_2) simultán szintén két gyököt adnak, a szerint, a mint $\gamma = +1$ vagy $\gamma = -1$ az előbbieik használatát előnyösebbnek ítéltjük. A következő részben majd rámutatok, hogy mi módon lehet a legáltalánosabb esetben is a $-\Phi(a, b)$ tényleges helyettesítését egyszerű jelváltással elkerülni úgy, hogy tehát, miként az (A) megoldásánál tulajdonképen csak a gyökök felét számítjuk, a másik fél itt is jelváltással adódik.

γ) Végül most már rátérhetek a $k \geq 3$ esetre; azaz

$$x^2 \equiv 1 \pmod{2^k M}. \quad (B)$$

E kongruencia összes mod. $2^k M$ inkongruens gyökeit megadja a következő formulák bármelyike:¹

$$F \equiv E + [\Phi(a, b) - E] 2^{k\gamma(M)} \pmod{2^k M}, \quad (9_1)$$

$$F' \equiv \Phi(a, b) + [E - \Phi(a, b)] M^{2^{k-1}} \pmod{2^k M}. \quad (9_2)$$

Ezeket közvetlenül nyerjük β) megfelelő formuláiból, ha az ott végzett megfontolások szószerint való ismétlése mellett,

¹ Könnyű belátni, hogy

$$F \equiv F' \pmod{2^k M}$$

mert hiszen

$$F \equiv F' \pmod{2^k}$$

$$F \equiv F' \pmod{M}$$

és $(2^k, M) = 1$.

még tekintetbe vesszük, hogy a jelen esetben a 4. cikk értelmében η helyett $E = \pm 1 + \varepsilon \cdot 2^{k-1}$ teendő, hol $\varepsilon = 1$, avagy 0. Hogy (9_1) , (9_2) gyökök, az származtatásukból evidens; hogy pedig egymásközt inkongruens gyököket adnak az is világos; mert ellenkező esetben úgy (9_1) , mint (9_2) adná például

$$\Phi(a, b) \equiv \pm \Phi(a_1, b_1) \pmod{M}, \quad q. e. a.$$

a 2. cikk értelmében. Ugyanígy $\pmod{2^k}$, különböző E , E_1 értékekre. Tehát: etc., $q. e. d.$

Minthogy E négyértékű, világos, hogy az összes különböző gyökök száma $G = 4 \cdot 2^r = 2^{r+2}$. Ezek közül $\frac{G}{2}$ -et, tehát 2^{r+1} számút nyilván megad a $\Phi(2^k a, b)$ függvény is. De a többi 2^{r+1} -et ezen az úton semmi módon nem nyerhetjük, mert hiszen ezek a 2^k felbomlásából származnak; már pedig a Φ minden ereje épen abban csúcsosodik, hogy az argumentumai relative törzsek.¹

Láttuk, hogy E négy, mod. 2^k inkongruens értéke a következő: $+1$, -1 , $+1 + 2^{k-1}$, $-1 + 2^{k-1}$; minthogy azonban világos, hogy $-(1 + 2^{k-1}) \equiv -1 + 2^{k-1} \pmod{2^k}$; azért is a (9_1) formula alkalmazásánál, ha adott Φ mellett négy gyököt már kaptunk, akkor a $-\Phi$ substituílásából származó négy új gyök egyszerűen adódik, ha amazok jelét ellenkezőre változtatjuk. Nevezetesen a (9_1) formulában csak arról van szó, hogy E az

¹ Minthogy

$$\begin{aligned} (\mp 1) + [(\pm \Phi(a, b)) - (\mp 1)]^{2^{kq(M)}} &\equiv \\ &\equiv (\pm \Phi(a, b)) + [(\mp 1) - (\pm \Phi(a, b))]^{M \varphi(2^k)} \equiv \\ &\equiv \pm \Phi(2^k a, b) \pmod{2^k M} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} (\pm 1) + [(\pm \Phi(a, b)) - (\pm 1)]^{2^{kq(M)}} &\equiv \\ &\equiv (\pm \Phi(a, b)) + [(\pm 1) - (\pm \Phi(a, b))]^{M \varphi(2^k)} \equiv \\ &\equiv \pm \Phi(a, 2^k b) \pmod{2^k M}, \end{aligned}$$

azért világos, hogy a $\Phi(2^k \alpha, \beta)$ típus 2^{r+1} számú értéke a (9_1) avagy (9_2) adta értékek közül azokat és csakis azokat adja, a melyek az $E = \pm 1$ helyettesítésből származnak.

$x^2 \equiv 1 \pmod{2^k}$ kongruencia valamely gyöke legyen; miért is a föntiek alapján

$$-[E+(\Phi-E)C] \equiv (-E)+[(-\Phi)-(-E)]C \pmod{2^k M},$$

hol $C \equiv 2^{k\varphi(M)} \pmod{2^k M}$ tettem; ha már most e kongruenciában E , a 2^k modulusra vett négy gyökértéken végig megy, akkor a baloldal megegyez a Φ ből (9_1) alapján kapott négy gyökkel, ezeket ellenkező jellel véve; míg a jobboldal a $-\Phi$ helyettesítéséből származó négy gyököt adja. E megjegyzés által a föntebb tett észrevétel helyessége evidenciába jut. Teljesen analóg megfontolásoknak van helyök, ha a (9_2) alapján reátekintünk a

$$-[\Phi+(E-\Phi)c] \equiv (-\Phi)+[(-E)-(-\Phi)]c \pmod{2^k M}$$

kongruenciára, hol ismét $c \equiv M^{2^{k-1}} \pmod{2^k M}$.¹

6.

Végül mintegy az elmélet aránylag simulékony alkalmazhatóságát bemutatandó (A) , (B_1) , (B_2) és (B) típusokra dolgozok ki egy-egy példát.

(A) -ra legyen $M=3 \cdot 5 \cdot 7=105$; tehát keressük az

$$x^2 \equiv 1 \pmod{105}$$

kongruencia összes különböző megoldásait. M felbontásainak a száma a jelen esetben 4, tehát a gyökök száma 8. A felbontások a következők: 1 (105), 3 (5 · 7), 5 (3 · 7), 7 (3 · 5); s így a gyökök:

$$\left. \begin{array}{l} \pm \Phi(1, 105) \equiv \pm 1 \\ \pm \Phi(3, 35) \equiv \pm 71 \\ \pm \Phi(5, 21) \equiv \pm 64 \\ \pm \Phi(7, 15) \equiv \pm 76 \end{array} \right\} \pmod{105}$$

¹ Álljon itt még a következő kiegészítő észrevétel. Minthogy általában mindig

$$\Phi(a, b) \equiv 1 - 2b^{\varphi(a)} \equiv -(1 - 2a^{\varphi(b)}) \pmod{ab}$$

azért is világos, hogy a Φ függvények számításánál előnyösebb annak ez utóbbi két alakban jelentkező formáit használni.

Vagy mindenütt a 105 felénél kisebb maradékokat véve, lesz a gyöksorozat: $\pm 1, \pm 29, \pm 34, \pm 41$.

(B_1) -re legyen $2M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$; tehát a kongruencia

$$x^2 \equiv 1 \pmod{210}.$$

A gyökök száma az elmélet szerint 8; és tényleg kapjuk

$$\left. \begin{aligned} \pm \phi(2, 105) &\equiv \pm \phi(1, 210) \equiv \pm 1 \\ \pm \phi(6, 35) &\equiv \pm \phi(3, 70) \equiv \pm 71 \\ \pm \phi(10, 21) &\equiv \pm \phi(5, 42) \equiv \pm 169 \\ \pm \phi(14, 15) &\equiv \pm \phi(7, 30) \equiv \pm 181 \end{aligned} \right\} \pmod{210}$$

Avagy a 105-nél kisebb maradékokat véve, lesz: $\pm 1, \pm 29, \pm 41, \pm 71$.

(B_2) -re legyen $4M = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, vagyis

$$x^2 \equiv 1 \pmod{60}.$$

Itt a gyökök száma lesz $G = 2^3 = 8$ és pedig például (8_2) formulát használva, sorban:

$$\left. \begin{aligned} \pm [\phi(1, 15) - (1 - \phi(1, 15)) \cdot 15] &\equiv \pm 1 \\ \pm [\phi(1, 15) - (-1 - \phi(1, 15)) \cdot 15] &\equiv \pm 31 \\ \pm [\phi(3, 5) - (1 - \phi(3, 5)) \cdot 15] &\equiv \mp 19 \\ \pm [\phi(3, 5) - (-1 - \phi(3, 5)) \cdot 15] &\equiv \mp 49 \end{aligned} \right\} \pmod{60}.$$

A gyökök tehát 30-nál kisebbre redukálva: $\pm 1, \pm 11, \pm 19, \pm 29$.

Végül (B) bemutatására választom $2^k \cdot M = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$, tehát

$$x^2 \equiv 1 \pmod{120}.$$

A gyökök száma lesz $2^4 = 16$ és pedig például (8_1) szerint rendre: tekintettel, hogy most $\pm \phi(1, 15) \equiv \pm 1 \pmod{15}$, $\pm \phi(3, 5) \equiv \mp 4 \pmod{15}$, míg $E = +1, -1, +3, -3$.

$$\left. \begin{aligned} \pm [1 + (1 - 1) 16] &\equiv \pm 1 \\ \pm [-1 + (1 + 1) 16] &\equiv \pm 31 \\ \pm [3 + (1 - 3) 16] &\equiv \mp 29 \\ \pm [-3 + (1 + 3) 16] &\equiv \mp 59 \end{aligned} \right\} \pmod{120}$$

és

$$\left. \begin{aligned} \pm [1 + (-4 - 1) 16] &\equiv \mp 79 \\ \pm [-1 + (-4 + 1) 16] &\equiv \mp 49 \\ \pm [3 + (-4 - 3) 16] &\equiv \pm 11 \\ \pm [-3 + (-4 + 3) 16] &\equiv \mp 19 \end{aligned} \right\} \pmod{120}$$

Így tehát redukált alakban a tizenhat gyök a következő:

$$\pm 1, \pm 11, \pm 19, \pm 29, \pm 31, \pm 41, \pm 49, \pm 59.$$

MÁSODIK RÉSZ.

Az $x^2 \equiv r \pmod{2^k M}$ kongruencia gyökei.

Az első részben tárgyaltam elemi összefüggések felderítése után szándékom megmutatni, hogy az előbbiekben bevezetett $\phi(a, b)$ függvénynek mintegy önmagától kinálkozó, természetesen általánosított analogonja a quadratikus számtestben, mi módon oldja meg a tetszőszerinti $2^k \cdot M$ modulusra (hol $k \geq 0$, M pedig bármely páratlan természetes számot¹ jelent) vett $x^2 \equiv r \pmod{2^k M}$ kongruenciát, melyben $r \not\equiv 0 \pmod{2^k M}$.² Bárha a következőkből kiviláglik, hogy a szereplő ϕ függvények a kérdéses kongruenciáknak nem csupán raczionális egész, hanem ugyanakkor az összes, az illető számtestben foglalt egész gyökeket is megadják; miért is tulajdonképen a közönséges értelemben vett $rN2^k M$ eset sem alkot kivételt, mihelyest a számtest nem raczionális egész számait is egész számoknak tekintjük; mindazonáltal eredeti célomtól el nem térve, e fejtegetést tisztán a *raczionális egész* gyökökre való tekintettel végzem, s a quadratikus számtestek segítségével

¹ Természetes szám alatt — DEDEKIND nyomán — értek bármely pozitív raczionális egész számot. (V. ö.: *natürliche Zahl*; DIRICHLET-DEDEKIND i. m. XI. Suppl. 436. l.)

² Az aRb és aNb symbolumok GAUSS jelölésében kifejezik, hogy a maradék (*residuum*) s illetőleg nem-maradék (*non-residuum*) modulo b . (C. F. GAUSS, Disqu. Arith. art. 131.)

hívása csak eszköz, számai pedig csak átmeneti s illetőleg symbolikus szereppel bírnak.

1.¹

Nézzük tehát első sorban az

$$x^2 \equiv r \pmod{p} \quad (\text{I})$$

kongruenciát, melyben p páratlan törzsszám, továbbá $(r, p)=1$ és $\left(\frac{r}{p}\right)=+1$, vagyis (I)-nek raczionális egész gyökei is vannak; azonkívül az általánosság rovása nélkül $r \equiv 2 \pmod{4}$; mert ha eredetileg volna $r \equiv \pm 1 \pmod{4}$, akkor r helyett vehetjük $r_1 = r + \varepsilon \varepsilon'$. $p \equiv r \pmod{p}$, hol $\varepsilon = +1, -1$, a mint $p \equiv +1, -1 \pmod{4}$ és $\varepsilon' = +1, -1$, a mint $r \equiv +1, -1 \pmod{4}$, s ekkor mindenképpen $r_1 \equiv 2 \pmod{4}$, míg az r -re tett megelőző feltevések nyilván az így megalkotott r_1 -re is érvényben maradnak. Legyen tehát $r = q^2 \cdot r_0$, hol q^2 a legnagyobb r -ben foglalt négyzet és minthogy $r = q^2 \cdot r_0 \equiv 2 \pmod{4}$, azért q páratlan, vagyis szintén $r_0 \equiv 2 \pmod{4}$.²

Ha most (I)-et a $\sqrt{r_0} = \theta$ -ból származó quadratikusszámtestben tekintem, akkor van értelme a következő helyettesítésnek:

$$x \equiv q\theta \cdot \xi \pmod{p}, \quad (1)$$

mely is — mint alább látjuk — x -et és ξ -t egyértelmű kongruenciavonatkozásba hozza mod. p .

(1)-et (I)-be írva

$$r \cdot \xi^2 \equiv r \pmod{p},$$

vagyis $(r, p)=1$ miatt szintén

$$\xi^2 \equiv 1 \pmod{p}. \quad (\text{II})$$

Nevezzük a θ adjunkciójával keletkezett véges számtestet Ω -nak, s a benne foglalt egész számok összességét \mathfrak{o} -nak, míg a raczionális számkörben a megfelelő fogalmak jelei R és $\mathfrak{z}=[1]$.

¹ A következőkben használt symbolistikára s illetve ideálméleti tételekre nézve mindvégig l. DIRICHLET-DEDEKIND i. m. XI. Supplement.

² Ha eredetileg $r \equiv 0 \pmod{4}$, akkor $r_1 = p + r \equiv \pm 1 \pmod{4}$, s így előáll a fönti esetek valamelyike.

Ismeretes, hogy a mennyiben a jelen feltevések mellett, ha D \mathfrak{Q} -nak ú. n. alapszámát (*Grundzahl*) jelenti,

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{(2)^2 \cdot r_0}{p}\right) = \left(\frac{r_0}{p}\right) = \left(\frac{q^2 r_0}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) = +1,$$

azért $\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, hol \mathfrak{p} és \mathfrak{p}' egymástól különböző elsőfokú törzs-ideálok, melyekre nézve: $N(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}') = p$, hol általában $N(\mathfrak{a})$ az \mathfrak{a} ideál normáját (*Norm*) jelenti.

Világos most már, hogy az (1) kongruenciának adott x mellett csakis egyetlen $\xi \equiv \frac{x}{q\theta} \pmod{p}$ számosztály tehet eleget; a mennyiben $q\theta$ és p biztosan relatív prímek, mert ellenesetben például $\mathfrak{o}(q\theta) > \mathfrak{p}$, tehát szintén $\mathfrak{o}(q\theta) > \mathfrak{p}'$, honnan $\mathfrak{o}(q\theta) > \mathfrak{p} - \mathfrak{p}' = \mathfrak{o}p$, vagyis $q\theta = \omega p$, hol ω \mathfrak{o} -nak egy száma, s így $q^2\theta^2 = r = \omega^2 \cdot p^2$; azaz ω^2 racionális, s minthogy szintén algebrai egész, azért racionális egész, miért is $r \equiv 0 \pmod{p}$, a mi lehetetlenség. Így tehát, ha $\xi_1 \not\equiv \xi_2 \pmod{p}$, akkor bizonyos, hogy $x(\xi_1) \not\equiv x(\xi_2) \pmod{p}$; mert másként e modulo p meghatározott x értékhez két különböző ξ megoldás tartozhatnék, *q. e. a.*

(II)-t nyilván így is írhatom

$$\xi^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{o}p},$$

azaz

$$\xi^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}. \quad (\text{III})$$

Az általános ideálméletből tudjuk, hogy ha m tetszőszerinti ú. n. összetett ideál, tehát például $m = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, mely felbontásban úgy \mathfrak{a} , mint \mathfrak{b} \mathfrak{o} -tól különbözőek; akkor mindig vannak \mathfrak{o} -ban oly α, β egész számok, hogy $\mathfrak{o}\alpha > \mathfrak{a}$ és $\mathfrak{o}\beta > \mathfrak{b}$ és sem α , sem β nem osztható m -el, de már $\mathfrak{o}(\alpha \cdot \beta) > m$, vagyis $\alpha\beta \equiv 0 \pmod{m}$.

Minthogy a (III) kongruencia esetében $\mathfrak{o}p$ egyedüli a tétel megkívánta felbontása éppen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, azért van oly $p > \mathfrak{p}$ és $p' > \mathfrak{p}'$ számpár, hogy $p \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}p}$, $p' \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}p}$, de már $p \cdot p' \equiv 0$

(mod. op). Önmagában világos, hogy p p' -höz, míg p' p -hez relative törzs, azaz $op + p' = 0 = op' + p$.¹

E megjegyzésekből következik, hogy a dolgozat első részében tárgyaltakhoz mindenben analog meggondolások, (III) kongruencia két $\equiv \pm 1$ (mod. op) gyökének következő p , p' -ben expliczit felírásához vezetnek:

$$\xi \equiv \pm \phi(p, p') \equiv \pm (p^q(p') - p'^q(p)) \equiv \pm (p^{p-1} - p'^{p-1}) \pmod{pp'}. \quad (IV)$$

Ugyanis FERMAT tétele szerint:

$$p^q(p') \equiv p^{N(p')-1} \equiv p^{p-1} \equiv 1 \pmod{p'}$$

és

$$p'^q(p) \equiv p'^{N(p)-1} \equiv p'^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

azaz

$$(p^{2(p-1)} - 1)(p'^{2(p-1)} - 1) \equiv - (p^{2(p-1)} + p'^{2(p-1)} + 1 + (pp')^{2(p-1)}) \equiv \\ \equiv 1 - (p^{2(p-1)} + p'^{2(p-1)}) \equiv 0 \pmod{pp'}$$

és tehát

$$[\pm \phi(p, p')]^2 \equiv [\pm (p^{p-1} - p'^{p-1})]^2 \equiv p^{2(p-1)} + p'^{2(p-1)} - 2(pp')^{p-1} \equiv \\ \equiv p^{2(p-1)} + p'^{2(p-1)} \equiv 1 \pmod{pp'};$$

míg ha lehetne $p^{p-1} - p'^{p-1} \equiv \pm 1$ (mod. pp'), akkor szintén vagy $p'^{p-1} \equiv -1 \equiv 1$ (mod. p), vagy pedig $p^{p-1} \equiv -1 \equiv 1$ (mod. p'), azaz $2 \equiv 0$ (mod. op), a p -re tett feltevések ellenére.

Már most ξ -nek (IV)-ből vett értékéből, az (1)-re tett megjegyzések alapján (l. 19. old.) kapjuk (I)-nek következő gyökeit:

$$x \equiv \pm q\theta \cdot \phi(p, p') \pmod{p} \quad (V)$$

Végül könnyű belátni, hogy (V)-ben a jobboldal raczionális egész szám; mert $-r_0 \equiv 2$ (mod. 4), vagyis $\theta \sim \left[1, \frac{D + \sqrt{D}}{2}\right] \sim [1, \theta]$ alapján $-p = a + \beta\theta$, $p' = a - \beta\theta$, $p = m + 1$ téve, lesz:

¹ Ilyen p , p' számokat kapunk például a $p^c = op$, $p'^c = op'$ összefüggésekből, hol c az Ω -ban foglalt ideálok osztályszáma, s mint ilyen *explicit*e függ: csupán a D -től s az o -ban foglalt *egységektől*, amely utóbbiak végeredményben ugyancsak a D révén adottaknak vehetők. L. DIRICHLET-DEDEKIND, i. m. §§. 181., 186. (V. ö. 23. old.)

$$\begin{aligned}
\Phi(p, p') &= (a + \beta\theta)^m - (a - \beta\theta)^m = \\
&= \left\{ \left(a^m + \binom{m}{2} a^{m-2} \beta^2 \theta^2 + \dots \right) - \left(a^m + \binom{m}{2} a^{m-2} \beta^2 \theta^2 + \dots \right) \right\} + \\
&+ \left\{ \left(\binom{m}{1} a^{m-1} \beta \theta + \binom{m}{3} a^{m-3} \beta^3 \theta^3 + \dots \right) - \right. \\
&- \left. \left(- \binom{m}{1} a^{m-1} \beta \theta - \binom{m}{3} a^{m-3} \beta^3 \theta^3 - \dots \right) \right\} = \\
&= 2\theta \left\{ \binom{m}{1} a^{m-1} \beta + \binom{m}{3} a^{m-3} \beta^3 \theta^2 + \binom{m}{5} a^{m-5} \beta^5 \theta^4 + \dots \right\} = \\
&+ 2\theta \cdot R(a, \beta, r_0),
\end{aligned}$$

hol $R(a, \beta, r_0)$ az a, β, r_0 raczionális egész számoknak egy egész kifejezése, s így

$$\pm q\theta\Phi(p, p') = \pm 2\theta^2 q R(a, \beta, r_0) = \pm 2r_0 q R(a, \beta, r_0),$$

vagyis $\pm q\theta\Phi$ benne van $\mathfrak{z}=[1]$ -ben, a mi bebizonyítandó volt.

2.

Mi sem könnyebb, mint az 1. cikk eredményeinek általánosítása révén, az

$$x^2 \equiv r \pmod{M} \quad (I)$$

kongruencia összes raczionális egész gyökeit felírni, hol M bármely páratlan pozitív egész szám.

Legyen e végből $M = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{e_i}$, hol a p_i -k páratlan raczionális törzsszámok. (I) \mathfrak{z} -ben megoldható és csakis akkor, ha

$$\left(\frac{r}{p_i} \right) = +1. \quad (i=1, \dots, n)$$

Miként előbb, úgy itt is elérhető, hogy $r = q^2 \cdot r_0 \equiv 2 \pmod{4}$, s így szintén $r_0 \equiv 2 \pmod{4}$, míg ugyanakkor $(r, M) = 1$ és

$$\left(\frac{r}{p_i} \right) = \left(\frac{r_0}{p_i} \right) = +1. \quad (i=1, \dots, n)$$

Minthogy továbbá minden i -re

$$\left(\frac{D}{p_i}\right) = \left(\frac{4r_0}{p_i}\right) = \left(\frac{r_0}{p_i}\right) = 1,$$

azért M a $\sqrt{r_0} = \theta$ -ból származó quadratikusszámtestben felbomlik az $\mathfrak{o}M = \prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{p}_i^{e_i} \cdot \mathfrak{p}'_i^{e_i}$ ideálszorzatra.

Másrészt az elemekből tudva van, hogy (I)-nek a jelzett feltevések mellett pontosan $g=2^n$ számú modulo M inkongruens megoldása van \mathfrak{z} -ben. Ugyanennyi mod. M inkongruens raczionális egész gyökét — vagyis tehát ugyanazt a megoldási rendszert — kapom azonban a következő megfontolások alapján is.

Jelentse $\bar{\mathfrak{p}}_i$ indefinite vagy \mathfrak{p}_i -t vagy \mathfrak{p}'_i -t és tegyük $\mathfrak{P}_k = \prod_{i=1}^{i=n} \bar{\mathfrak{p}}_i^{e_i}$, hol k jelenti a k -ik megválasztást, a midőn bizonyos sorrendben a $\bar{\mathfrak{p}}_i$ -kra egymástól függetlenül \mathfrak{p}_i -t s illetve \mathfrak{p}'_i -t irtunk. Az így nyert különböző \mathfrak{P}_k -k száma nyilván 2^n , melyek azonban — mint könnyű meggyőződni — $\mathfrak{P}_h, \mathfrak{P}'_h$ típusú párokban csoportosíthatók, mely különböző párok száma 2^{n-1} ; minthogy továbbá minden h -ra $\mathfrak{o}M = \mathfrak{P}_h \mathfrak{P}'_h$, azért végeredményben kapjuk illetén módon M -nek 2^{n-1} különböző felbontását és pedig:

$$\mathfrak{o}M = \mathfrak{P}_h \cdot \mathfrak{P}'_h. \\ (h=1, \dots, 2^{n-1})$$

Ha megint teszszük

$$x \equiv q\theta \cdot \xi \pmod{M}, \quad (1)$$

melyre is az 1. cikk észrevételei szó szerint érvényben maradnak,¹ akkor lesz (I)-ből

$$\xi^2 \equiv 1 \pmod{M}. \quad (II)$$

¹ Ha ugyanis lehetne $\mathfrak{o}(q\theta) + \mathfrak{o}M \neq \mathfrak{o}$, akkor kellene például $\mathfrak{o}(q\theta) > P$, hol $\mathfrak{o}M > P$ s így szintén $\mathfrak{o}(q\theta) > P'$, azaz

$$\mathfrak{o}(q\theta) > P - P' = \mathfrak{o}(p_{i_1}^{t_{i_1}} \dots p_{i_s}^{t_{i_s}}) = \mathfrak{o}P_s,$$

hol i_1, i_2, \dots, i_s valamelyik s -es füzet az 1, 2, ..., n sorból, míg

$$t_{i_1} \leq e_{i_1}, \dots, t_{i_s} \leq e_{i_s};$$

de akkor $q\theta = \omega \cdot P_s$, a mi ellentmondó $(r, M) = 1$ -nek.

Könnyű belátni, hogy $\mathfrak{o}M$ előbbi felbontásai mindenikére $\mathfrak{P}_h + \mathfrak{P}'_h = \mathfrak{o}$, vagyis \mathfrak{P}_h és \mathfrak{P}'_h relativ törzsideálok. Legyen a θ -ból származott \mathcal{Q} testben az ideálosztályok száma c , akkor tudjuk, hogy minden \mathcal{Q} -beli ideál c -dik hatványa főideál; tehát $\mathfrak{P}_h^c = \mathfrak{o}\gamma_h$ és $\mathfrak{P}_h'^c = \mathfrak{o}\gamma'_h$. Innen világos, hogy $\mathfrak{o}\gamma_h > \mathfrak{P}_h$, $\mathfrak{o}\gamma_h + \mathfrak{P}'_h = \mathfrak{o}$, míg $\mathfrak{o}\gamma'_h > \mathfrak{P}'_h$, $\mathfrak{o}\gamma'_h + \mathfrak{P}_h = \mathfrak{o}$ és $\mathfrak{o}(\gamma_h\gamma'_h) > \mathfrak{P}_h\mathfrak{P}'_h = \mathfrak{o}M$, vagyis $\gamma_h\gamma'_h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}M}$.¹

Már most (II) megoldásai lesznek az így meghatározott γ -kban:

$$\xi_h \equiv \pm \Phi(\gamma_h, \gamma'_h) \equiv \pm (\gamma_h^{q(\mathfrak{P}_h)} - \gamma_h'^{q(\mathfrak{P}_h)}) \pmod{\mathfrak{o}M} \quad (\text{III})$$

($h=1, \dots, 2^{n-1}$)

összesen 2^{n-1} gyökpár; s így (I)-nek 2^n számú gyöke és pedig valamennyien a következő alakban, ezek:

$$x_h \equiv \pm q\theta \cdot \Phi(\gamma_h, \gamma'_h) \pmod{\mathfrak{o}M}. \quad (\text{IV})$$

($h=1, \dots, 2^{n-1}$)

E legutóbbi állításom igazolására hátra van, hogy kimutassam, miszerint bármely h -ra:

1. $\xi_h^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{o}M}$,
2. $\xi_h \not\equiv \pm 1 \pmod{\mathfrak{o}M}$,
3. $\pm \xi_h \not\equiv \xi_k \pmod{\mathfrak{o}M}$, $\xi_h \not\equiv -\xi_h \pmod{\mathfrak{o}M}$
($h \neq k$)

és

4. $q\theta\Phi(\gamma_h, \gamma'_h)$ raczionális egész szám.

Ad. 1. Láttuk, hogy

$$\mathfrak{o}\gamma_h + \mathfrak{P}'_h = \mathfrak{o} = \mathfrak{o}\gamma'_h + \mathfrak{P}_h$$

és $\gamma_h\gamma'_h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}M}$, honnan a $\xi_h^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{o}M}$ kongruenciák az 1. cikk lépései szerint egyszerre adódnak az általánosabb FERMAT-féle tétel segítségével.

¹ Lehet, hogy már $\mathfrak{P}_h^{c_1}$ is főideál, hol c_1 c -nek valamely valóságos osztója. (L. J. SOMMER: Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig und Berlin 1907. II. 16., 77. old.)

Ad 2. Ha volna például

$$\gamma_h^{\varphi(\mathfrak{P}'_h)} - \gamma'^{\varphi(\mathfrak{P}_h)} \equiv \pm 1 \pmod{\mathfrak{P}_h \mathfrak{P}'_h},$$

akkor innen vagy

$$\gamma'^{\varphi(\mathfrak{P}_h)} \equiv -1 \equiv +1 \pmod{\mathfrak{P}_h}$$

vagy

$$\gamma_h^{\varphi(\mathfrak{P}'_h)} \equiv -1 \equiv +1 \pmod{\mathfrak{P}'_h},$$

azaz mindig $2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}M}$, a mi nem lehet.

Ad 3. Ha lehetne $\xi_h \equiv -\xi_h \pmod{\mathfrak{o}M}$, vagyis $2\xi_h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}M}$, akkor (2) alapján kellene $\xi_h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}M}$, azaz (1)-ből $1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}M}$, a mi világosan abszurdum.

Ugyanígy, ha

$$\Phi(\gamma_h, \gamma'_h) \equiv \pm \Phi(\gamma_k, \gamma'_k) \pmod{\mathfrak{o}M},$$

akkor innen vagy

$$\Phi(\gamma_k, \gamma'_k) \equiv -1 \pmod{\mathfrak{P}_h}$$

vagy pedig

$$\Phi(\gamma_k, \gamma'_k) \equiv -1 \pmod{\mathfrak{P}'_h};$$

minthogy azonban

$$1 \equiv \gamma_k^{\varphi(\mathfrak{P}'_k)} + \gamma'^{\varphi(\mathfrak{P}_k)} \pmod{\mathfrak{P}_h}$$

és

$$1 \equiv \gamma_k^{\varphi(\mathfrak{P}'_k)} + \gamma'^{\varphi(\mathfrak{P}_k)} \pmod{\mathfrak{P}'_h},$$

azért vagy

$$2\gamma_k^{\varphi(\mathfrak{P}'_k)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_h}, \quad (\alpha)$$

vagy

$$2\gamma_k^{\varphi(\mathfrak{P}'_k)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}'_h}; \quad (\beta)$$

minthogy azonban $\mathfrak{P}_k \neq \mathfrak{P}_h$, azért — ez ideálok megalkotása módjából következik — van bizony \mathfrak{P}_h -nak oly $\bar{\mathfrak{p}}_h$ ideáltényezője, mely \mathfrak{P}_k -nak nem törzsideáltényezője; ugyanígy $\mathfrak{P}_k \neq \mathfrak{P}'_h$ -ből kapjuk, hogy van \mathfrak{P}'_h -ben oly $\bar{\mathfrak{p}}'_h$ törzsideáltényező, mely \mathfrak{P}_k -ban nem szerepel; s így (α)-ból — egy pillanatra $\varphi(\mathfrak{P}'_k) = x$ téve — kellene $\gamma_k^x \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{p}}_h}$, míg (β)-ból

$\gamma_k^x \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{p}}_h}$; azaz: $(\gamma_k)^x > \bar{\mathfrak{p}}_h$ vagy $(\gamma_k)^x > \bar{\mathfrak{p}}'_h$, tehát $\gamma_k = \mathfrak{P}_k^e > \bar{\mathfrak{p}}_h$ vagy $\gamma_k = \mathfrak{P}_k^e > \bar{\mathfrak{p}}'_h$, mely esetek mindketteje, az éppen irt észrevételek alapján egyaránt ellenmondást tartalmaz.

Ad. 4. Ha meggondoljuk, hogy

$$\begin{aligned} (\mathfrak{P}_k) &= \varphi(\Pi \bar{\mathfrak{p}}_i^{e_i}) = \Pi \varphi(\bar{\mathfrak{p}}_i^{e_i}) = \Pi p_i^{e_i-1} (p_i - 1) = \Pi \varphi(\bar{\mathfrak{p}}_i'^{e_i}) = \\ &= \varphi(\Pi \bar{\mathfrak{p}}_i^{e_i}) = \varphi(\mathfrak{P}_k) = m_k \end{aligned}$$

úgy látható, hogy

$$\Phi(\gamma_k, \gamma'_k) = (a + \beta\theta)^{m_k} - (a - \beta\theta)^{m_k} = \theta \cdot z,$$

hol z \mathfrak{z} -nek egy száma, honnan a többi önként adódik.

3.

Legyen végül legáltalánosabban

$$x^2 \equiv r \pmod{2^k \cdot M}, \quad (I)$$

hol $k > 0$, M pedig ismét bármely páratlan egész szám, míg $(r, 2^k M) = 1$ és $r \equiv 1 \pmod{2^k M}$.

(I) teljesen æquivalens a következő két simultán relációval

$$x^2 \equiv r \pmod{2^k}, \quad (Ia)$$

$$x^2 \equiv r \equiv q^2 \cdot r_0 \pmod{M}. \quad (Ib)$$

$$(r_0 \equiv 2 \pmod{4})$$

Ha εx_h — hol $\varepsilon = \pm 1$ — határozatlanul valamelyik gyöke (Ib)-nek, a melynek is összes megoldásait a megelőző cikkek szerint mindig felírhatjuk és $k=1$, akkor kapjuk

$$2f+1 \equiv \varepsilon x_h \pmod{M}.$$

honnan

$$f \equiv 2^{\varphi(M)-1} (\varepsilon x_h) \pmod{M},$$

vagyis (I)-nek összes gyökei:

$$\bar{x}_g \equiv 2^{\varphi(M)} (\varepsilon x_h - 1) + 1 \pmod{2M},$$

hol egymástól függetlenül $\varepsilon = +1, -1$; $h=1, \dots, 2^{n-1}$. Mint-hogy pedig $\varepsilon \equiv 1 \pmod{2}$, azért

$$2^{\varphi(M)} (\varepsilon x_h - 1) + 1 \equiv \varepsilon [2^{\varphi(M)} (x_h - 1) + 1] \pmod{2M}$$

és tehát irható

$$\bar{x}_g \equiv \varepsilon [2^{\varphi(M)}(x_h - 1) + 1] \pmod{2M}. \quad (\alpha)$$

$$(\varepsilon = \pm 1; h=1, \dots, 2^{n-1}; g=1, \dots, 2^n)$$

(α) kifejezés ad tehát $G = 2^n$ számú megoldást, s ezek mod. $2M$ nyilván mind különbözőek, vagyis a $k = 1$ esetben tényleg (I)-nek összes gyökei.

Ha $k = 2$, akkor $r \equiv 1 \pmod{4}$ és $G = 2^{n+1}$; (Ia) gyökeit pedig az $\eta + 4f$ alak tartalmazza, hol $\eta = \pm 1$. Kell tehát

$$4f + \eta \equiv \varepsilon x_h \pmod{M},$$

azaz

$$f \equiv 4^{\varphi(M)-1}(\varepsilon x_h - \eta) \pmod{M}$$

s így

$$\bar{x}_g \equiv 4^{\varphi(M)} \cdot (\varepsilon x_h - \eta) + \eta \pmod{4M},$$

hol függetlenül $\varepsilon = +1, -1$; $h = 1, \dots, 2^{n-1}$; $\eta = +1, -1$. Megjegyezve azonban, hogy a

$$4^{\varphi(M)} \cdot (\varepsilon x_h - \eta) + \eta$$

$$(\varepsilon = \pm 1; \eta = \pm 1; h=1, \dots, 2^{n-1})$$

kifejezés által reprezentált komplexum æquivalens az

$$\varepsilon [4^{\varphi(M)} \cdot (x_h - \eta) + \eta]$$

$$(\varepsilon = \pm 1; \eta = \pm 1; h=1, \dots, 2^{n-1})$$

összességgel írhatjuk

$$\bar{x}_g \equiv \varepsilon [4^{\varphi(M)} \cdot (x_h - \eta) + \eta] \pmod{4M}. \quad (\beta)$$

$$(\varepsilon = \pm 1; \eta = \pm 1; h=1, \dots, 2^{n-1}; g=1, \dots, 2^{n+1})$$

Hogy a (β)-ban foglalt gyökök mod. $4M$ valamennyien inkongruensek, az előbbieket alapján közvetlenül belátható, ha $\bar{x}_{g_1}, \bar{x}_{g_2} (g_1 \neq g_2)$ párt mod. 4 s illetve mod. M vesszük.

Ha végül $k \geq 3$, akkor (Ia)-ban szükségképen $r \equiv 1 \pmod{8}$ és az $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ kongruenciának például $+1$ gyökéből egymásután — és pedig expliczite — kaphatjuk az

$$x^2 \equiv r \pmod{16}, \dots, x^2 \equiv r \pmod{2^k}$$

kongruenciáknak egy-egy a_4, a_5, \dots, a_k gyökét.¹ Az így nyert a_k -ban kifejezve, $x^2 \equiv r \pmod{2^k}$ összes többi gyökei lesznek:

$$E \equiv \varepsilon_1 (a_k + \eta 2^{k-1}) \pmod{2^k} \\ (\varepsilon_1 = \pm 1; \eta = 0, 1)$$

Így tehát kell

$$2^k f + E \equiv \varepsilon x_h \pmod{M},$$

azaz

$$f \equiv (2^k)^{\varphi(M)-1} (\varepsilon x_h - E) \pmod{M}$$

s így

$$\bar{x}_g \equiv (2^k)^{\varphi(M)} \cdot (\varepsilon x_h - E) + E \pmod{2^k M}$$

mint a mely kifejezés még így írható

$$\bar{x}_g \equiv \varepsilon \{ (2^k)^{\varphi(M)} \cdot (x_h - E) + E \} \pmod{2^k M} \quad (\gamma) \\ (\varepsilon = \pm 1; h = 1, \dots, 2^{n-1}; E = \varepsilon_1 (a_k + \eta 2^{k-1}); \varepsilon_1 = \pm 1; \\ \eta = 0, 1; a_k^2 \equiv r \pmod{2^k}; g = 1, \dots, 2^{n+2})$$

és megadja az $x^2 \equiv r \pmod{2^k M}$ kongruenciának összes $G = 2^{n+2}$ számú inkongruens gyökét.

A k -ra vonatkozó mindhárom esetet egybefoglalja tehát a következő tétel: az $x^2 \equiv r \pmod{2^k M}$, hol $k > 0$ kongruencia összes inkongruens megoldásait megadja az

$$\bar{x}_g \equiv \varepsilon \{ (2^k)^{\varphi(M)} (x_h - E) + E \} \pmod{2^k M}$$

kifejezés, melyben $\varepsilon = \pm 1, h = 1, \dots, 2^{n-1}$, míg E az $x^2 \equiv r \pmod{2^k}$ kongruencia összes inkongruens gyökértégeit felveszi.

A 2. cikkben tárgyalt eset előáll, ha $k=0$. Könnyű látni, hogy az éppen kimondott tétel ezt az esetet is felöleli, mi-helyest észreveszszük, hogy az $x^2 \equiv r \pmod{1}$ kongruenciának minden szám eleget tesz olyaténképpen, hogy valamennyi az egyetlen 0-gyök által képviselt számosztályba tartozó mod. 1.

Azaz tehát az $x^2 \equiv r \pmod{2^0 M}$ kongruencia összes gyökei bennfoglalvák az

$$\bar{x}_g \equiv \varepsilon \{ (2^0)^{\varphi(M)} (x_h - z) + z \} \equiv \varepsilon x_h \pmod{2^0 M}$$

¹ L. DIRICHLET-DEDEKIND: id. m. § 36.

kifejezésben, hol $\varepsilon = \pm 1$; $h = 1, \dots, 2^{n-1}$; míg z tetszésszerint való szám \mathfrak{z} -ből, azaz a $x^2 \equiv r \pmod{1}$ kongruencia mod. 1 egyetlen megoldásának reprezentánsa.

Megelőző fejtegetéseink egybefoglalása tehát csakugyan a dolgozat elején kimondott általános tételhez vezet; a mi pedig bebizonyítandó volt.

Grosschmid Lajos.

ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ALGEBRAI ÉS LOGARITMIKUS SZINGULARITÁSAIRÓL.

(Első közlemény.)

Bevezetés.

1. A függvény-fogalom a maga általánosságában nem tartalmaz semmiféle megszorítást, melynél fogva a függvénynek egy bizonyos (ab) intervallumban való viselkedéséből ezen intervallumon kívül, tetszőleges helyeken feltüntetett tulajdonságaira lehessen következtetni. A függvény menetének ez a teljes szabadsága minden tüzetesebb vizsgálatot lehetetlenné teszen addig, míg valamely célszerűen megválasztott matematikai kifejezésmód segélyével bizonyos függvényosztályt nem körvonalozunk, melynek egy bizonyos intervallumban való viselkedése — épen a matematikai forma erejénél fogva — nem közbős arra nézve, hogy másutt mily jelenségeket várhatunk.

A függvény különböző szakaszainak ez a szolidaritása minden idevágó vizsgálatban alapvető fontosságú s a legmélyebb tanulmányoknak tárgyai épen azok a függvényosztályok voltak és lesznek is mindég, melyeknek jellemző matematikai kifejezése e szolidaritást a legteljesebben megvalósítja. A természettudományok kísérleti adatainak törvénybe foglalását is ennek a szempontnak kell irányítania s ez mindég lehetséges, mert a kísérleti adathalmaz mindég egy, az adatok számának növekedésével ugyan keskenyedő, de végezzsámú adat esetében mindig véges szélességű, sávot határoz meg, hol mindig elhelyezhetek oly függvényt, melynek elég kedvező analitikai

tulajdonságai vannak. Legegyszerűbb e függvények között a polinóm és annak közvetlen általánosítása a TAYLOR-sor, mely egyszersmind a mai matematikában használt legáltalánosabb függvényosztályt az analitikai függvényeket is jellemzi.

Mi e legkedvezőbb előállítási formában, a TAYLOR-sorban kifejezett függvényekre vonatkozó vizsgálatokat szándékozunk az alábbiakban közölni. A differenciálhányadosok egy bizonyos pontban felvett értékeinek megszámlálható halmaza meghatározza a függvény viselkedését WEIERSTRASS értelmezése szerint egy, ama pont körül vont egész körben és a síknak mindama részein, a hova innen analitikai folytatással eljutni lehet. Az analitikai folytatásnak sokszor nagyon nehézkes volta miatt egymásután történtek a változó szerencsés kísérletek a függvénynek más formában minél nagyobb területen való egységes ábrázolására, melyek közül a számunkra legfontosabbat, az exponenciális összeget emeljük ki, mely az összegzési sokszögben, továbbá a polinóm-soros vagy egész-függvényes ábrázolást, mely az egész síkra kiterjeszkedő csillagtartományban mutatja meg a függvény viselkedését. Mindezek az ábrázolások végeredményben a TAYLOR-sor segítségével történnek, mert lényegesen felhasználják annak együtthatóit. Ezek az eredmények teljesen meghatározzák a függvénynek szabályos helyeken való viselkedését, azonban teljes kétségben hagynak a függvény szinguláris helyeit illetőleg.

2. És ezzel új probléma-kör nyílik meg előttünk: hogyan szerezzünk tudomást a függvény viselkedéséről oly pontokban, melyeket épen ismeretlen s megközelíthetetlen voltuk miatt szinguláris helyeknek kellett neveznünk? E kérdés elől ki nem térhetünk, mert épen ezek a helyek adják meg a függvény karakterét s a legtöbb esetben fizikai jelentésük is fontos.

Legmódszeresebb kiindulásul kínálkozik az a gondolat, hogy kíséreljük meg, nem világosítanának-e fel bennünket a függvénynek ily szinguláris helyeken való viselkedéséről azok az ábrázolási módok, a melyeknek segítségével a szabályos helyeken már sikerült eligazodnunk.

Ennek a gondolatnak módszeres keresztülvitelét kíséreltük meg a részben itt (két értekezés az előbbi évfolyamban), részben a magyar *Akadémia Értesítőjében* (két dolgozat az 1909. és 1910. évfolyamokban) és a párisi akadémia *Comptes Rendus-jében* (négy Note az 1908., 1909. évekből), végül a *Journal de Mathématiques*-ban Essai sur les singularité des fonctions analytiques cz. alatt 1909. évfolyamban közölt vizsgálatainkban (ez utóbbit DIENES, Essai etc. rövidítéssel fogjuk idézni) s a jelen értekezés az ott közölteknek folytatása s az ott fölvetett¹ problémának bizonyos értelemben teljes és végleges megoldását foglalja magában. Megkíséreljük az analitikai függvények logaritmikus elágazó helyeinek, logaritmikus pólusainak és logaritmikus algebrai szingularitásainak vizsgálatát² oly értelemben, hogy a szabályos helyekre vonatkozó ábrázolásmódok felhasználásával oly határösszefüggéseket adunk, melyek a kérdéses pontban teljesen jellemzik a függvény viselkedését.

I. RÉSZ.

Szingularitások az összetartási körön és az összegezési sokszög kerületén.

A felhasznált eredmények kivonata.

3. Röviden felsoroljuk a legfőbb eredményeket, melyeket a jelen dolgozatban használunk.

Az aritmetikai közepekre vonatkozókat ismerteknek tételezve föl, kezdjük a BOREL-féle exponenciális összeg fölemlítésével. BOREL bebizonyította,³ hogy az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

¹ PAUL DIENES: Sur les singularités des fonctions analytiques en dehors du cercle de convergence. *Comptes Rendus*, le 15 mars 1909.

² Ezek pontos meghatározását lásd DIENES P. és DIENES V.: Általános tételek az algebrai és logaritmikus szingularitásokról. *Akad. Ért.* 1910.

³ PL. BOREL: Leçons sur les séries divergentes. Chapitre III.

analitikai függvény c_n együtthatóit az

$$s_n(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_n x_0^n$$

formában felhasználva, az

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S(a; x_0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}}$$

határérték van és megadja a függvény értékét az összegezési sokszög belsejébe eső minden szabályos helyen. E határérték neve exponenciális összeg és más formában, melyben szintén alkalmunk lesz felhasználni, így írható

$$\int_0^{\infty} e^{-a} u(a) da,$$

hol

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{2!} + \dots$$

és

$$u_n = c_n x_0^n.$$

Ez az előállítás a MITTAG-LEFFLER-féle polinómsoros, illetve egész függvényes előállításnak egy neme, melynek egyszerű szerkezeténél s az exponenciális függvény lényeges kihasználásánál fogva feltűnő metodikai előnyei vannak, s ezeknek az alábbiakban alkalmunk lesz hasznát venni. Hátránya a MITTAG-LEFFLER-féle előállítással szemben, hogy csak az összegezési sokszög határain belül használható. Az összegezési sokszöget úgy képezzük, hogy a síkon elszórt szinguláris pontokat az összetartási kör középpontjával összekötjük s az így nyert egyenesre ama szinguláris ponton át merőlegest emelünk. E merőlegesek sokszöget zárnak be, melyen belül az exponenciális összegnek van határértéke.

4. Az egész csillagtartományra kiterjedő vizsgálatainkban függvényünk megközelítésére egész függvényeknek egy

$$F(a_1, x), F(a_2, x), \dots$$

sorozatát fogjuk választani,¹ melyeknek határértéke, mikor a -nak tetszőleges nagy értékeket adunk, megadja a vizsgált $f(x)$ függvényértékét a csillagtartomány belsejébe eső minden pontban. A csillagtartomány az egész síkra kiterjed, azonban kizárandók belőle azok a félegyenese, melyeket a következő módon nyerünk. A szinguláris pontokat egyenesek által összekötjük az összetartási kör középpontjával s az így nyert egyeneseken a középpontból kiindulva legelőször talált szinguláris pontot vesszük a kizárandó egyenes kezdőpontjául.

A megközelítő $F(a, x)$ függvények alakítására a BOREL-féle exponenciális összeghez teljesen analog szerkezetű formulát fogunk használni azzal a különbséggel, hogy abban az e^x exponenciális függvény helyett

$$E_{\beta}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}$$

függvény fog szerepelni, melyet LINDELÖF tanulmányozott s melyről kimutattuk,² hogy ily összegezési függvényül használva a

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = F(a, x_0)$$

egész függvények határértéke, mikor a -val a végtelen felé megyünk, épen az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

függvénynek odatartozó értékét adja a csillagtartomány minden pontjában, ha

$$s_n(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_n x_0^n.$$

¹ MITTAG-LEFFLER: Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène, 5-e Note. Acta mathematica, t. XXIX, 1905, 173. lap.

² P. DIENES: Essai etc. XI. §.

5. Ezeket az eredményeket, melyek a függvényt mind nagyobb területen határozzák meg reguláris pontjaiban, a szinguláris pontok vizsgálatára fogjuk felhasználni. Az összetartási kör, az összegezési sokszög s a csillagtartomány belseje helyett e tartományok határhelyeire fordítjuk figyelmünket s kutatni fogjuk a függvény viselkedését olyan helyeken, hol a függvény logaritmikus, poláris és algebrai szingularitásokat vagy ezek kombinációit mutatja. Ebben az irányban folyton növekedő hatáskörű kutatások után végeredményben teljesen precíz s e precizitás mellett a legáltalánosabb eredményhez fogunk eljutni. Hangsúlyozzuk, hogy ha meggondolásaink kezdetén a dolog természetéből folyólag s a továbbhaladás érdekében ideiglenesen teszünk is megszorítást függvényünk együtthatóira, *végeredményeink ez együtthatókra vonatkozólag semminémű megszorításokat nem fognak tartalmazni.*

Ahhoz, hogy meggondolásainkban a logaritmikus algebrai stb. pontok meghatározását elég szélesen tarthassuk, HADAMARD egy eredményére lesz szükségünk, melyet itt külön kiemelünk, a felhasznált többi fogalmakra vonatkozólag pedig egyszerűen utalunk az ő nagyszabású kutatásaira, melyek épen úttörő voltuknál fogva nehezen mennek át a matematikai köztudatba.¹ (A függvény rendjének fogalmát, melyet lényegesen kihasználunk, lásd: DIENES, Essai etc. 1. §.)

6. Annak kifejezésére, hogy a tanulmányozandó szingularitás milyen természetű, az $f(x)$ függvényt a kérdéses pontban

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

összeg alakjában fogjuk felírni, hol $f_1(x)$ árulja el a szingularitás természetét és az egész körre vett rendje tetszésszerűnti kevéssel haladja meg az eredeti $f(x)$ rendjét a vizsgált pontban; $f_2(x)$ pedig szabályos ugyanezen pontban. Ez összeg tanulmányozása s a jellemző határértékek kiszámítása céljából felhasználjuk HADAMARD következő eredményét.²

¹ HADAMARD: Essai sur l'étude des fonctions etc. Journ. de Math. 1892.

² U. o.

Minden függvény, mely az összetartási kör egy bizonyos ívén s annak határain ω -adrendű, helyettesíthető két függvény összegével, melyek egyikének rendje az egész körre véve ω , vagy tetszőlegesen kevéssel több, mint ω , a másik függvény pedig holomorf a vizsgált ív minden pontjában. Más szóval

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

hol a $\sum b_n x^n$ függvénynek az egész körre vett rendje tetszőlegesen kevéssé különbözik $f(x)$ -nek a vizsgált ívre vett rendjétől, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pedig holomorf az (ab) íven.

Ennek segítségével¹ bebizonyítottuk, hogy általában az $f(x)$ függvény TAYLOR-sora konvergens az összetartási kör minden negatívrendű pontjában, ha $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ s hogy az r -edrendű aritmetikai közepek vannak és megadják a függvény értékét az összetartási kör minden negatívrendű pontjában, ha $\lim_{n=\infty} \frac{a^n}{n^r} = 0$.

Ez eredmények birtokában megkezdhetjük vizsgálatainkat s legelőször is az összetartási körön fekvő szingularitásokat fogjuk tanulmányozni.

Logaritmikus szingularitások az összetartási körön.²

7. Legyen x_0 az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

analitikai függvénynek szinguláris pontja, mely az $|x_0|$ sugarú összetartási körön van és tegyük fel, hogy ezen x_0 a függvénynek logaritmikus elágazó pontja, hol azaz hogy írhatjuk

$$f(x) = A_q \left(\log \frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right)^q + \dots + A_1 \log \frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}} + \varphi(x), \quad (A)$$

¹ P. DIENES: Essai etc. § VI.

² V. DIENES: Sur les points critiques logarithmiques. Comptes Rendus le 26 avril 1909.

hol q egész szám, $\varphi(x)$ az x_0 pontban holomorf, vagy általánosabban, negatívrendű. És általában, míg az aritmetikai közepeket fogjuk vizsgálni s ellenkező kijelentést nem teszünk, felteszszük, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^k} = 0. \quad (k)$$

A következő tételt mondhatjuk ki:

Ha a (k) alatti határegyenlet fennáll, akkor az összetartási kör minden x_0 logaritmikus elágazó pontjában

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n^{(k)}}{\log^q n} = A_q,$$

hol $\sigma_n^{(k)}$ a c_n együtthatókból képezett s_n részletösszegeknek k -adik aritmetikai közepe.

Tehát a k -adik számtani közepek segítségével egymásután ki tudjuk számítani az

$$A_q, A_{q-1}, \dots, A_1$$

numerikus állandókat, melyek teljesen jellemzik a szingularitást.

A bizonyítást azon az egyszerű eseten kezdjük, hol

$$f(x) = A \log \frac{1}{1-x} + \varphi(x)$$

és egyelőre csak a jobboldali összeg első tagját vizsgáljuk, mely a bennünket érdeklő szingularitást tartalmazza s az írás egyszerűsítése kedvéért az összetartási kör sugarát 1-nek, a vizsgálandó szinguláris helyet az egységpontnak vettük.

Az $f(x)$ részletösszegeit s_n -nek, a $\log \frac{1}{1-x}$ függvény részletösszegeit s'_n -nek s a $\varphi(x)$ függvényeit s''_n -nek nevezzük. Akkor az EULER-féle egyenlőség

$$\lim_{n=\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right] = c$$

felhasználásával

$$s'_n(1) = [\log n + c_n],$$

a miből

$$\lim_{n=\infty} \frac{s'_n(1)}{\log n} = 1. \quad (1)$$

Továbbá PRINGSHEIM lemmája szerint,¹ ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^{p-1}\lambda_n^\alpha} = g, \quad p > 0, \quad \alpha = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases},$$

akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_0 + c_1 + \dots + c_n}{n^p \lambda_n^\alpha} = \frac{g}{p}.$$

Minthogy a λ_n -re kiszabott föltételeket a $\log n$ teljesíti, e lemma a mi esetünkben, hol

$$\begin{aligned} c_n &= s'_n \\ c_0 + c_1 + \dots + c_n &= n\sigma'_n(1) \\ p &= 1 \\ g &= 1 \end{aligned}$$

alkalmazható, tehát (1)-ből következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma'_n(1)}{\log n} = 1$$

s az okoskodást tetszőlegesen folytatva minden egészszámú k -ra nézve áll, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma'_n(k)}{\log n} = 1.$$

8. Abban az általánosabb esetben, mikor

$$f(x) = A \log^q \frac{1}{1-x} + \varphi(x),$$

a logaritmus sorát így írjuk

$$\log \frac{1}{1-x} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \right) + R(x),$$

¹ PRINGSHEIM: Über den Divergenz-Charakter gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze. Acta Mathematica, t. 28. 1904. 25. lap.

hol a sor maradéka

$$R(x) = x^{n+1}P(x).$$

Ebből, mint kéttagú mennyiség q -adik hatványa,

$$\begin{aligned} \log^q \frac{1}{1-x} &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} \right)^q + \\ &+ q \left(x + \dots + \frac{x^n}{n} \right)^{q-1} R(x) + \dots + R^q(x). \end{aligned}$$

Minthogy

$$s'_n < \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \right)^q,$$

mert x -nek n -nél magasabb hatványait is tartalmazza, viszont x -nek $(n+1)$ -nél kisebb hatványa a

$$q \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^4}{n} \right)^{q-1} R(x) + \dots + R^q(x)$$

kifejezésben nem fordul elő, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{s'_n(1)}{\log^q n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)^q}{\log^q n} = 1 \quad (2)$$

EULER egyenlősége alapján.

Ugyanez az eljárás megmutatja ez állítás kiegészítő részét is olyformán, hogy a logaritmus sorának most már az $\frac{n}{q}$ -adik tagot követő részét vesszük $R(x)$ maradékul, azaz

$$\log \frac{1}{1-x} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{\frac{n}{q}}}{\frac{n}{q}} \right) + R(x)$$

egyenlőségből indulunk ki, hol tulajdonképpen $\frac{n}{q}$ egész részére kell gondolunk $\frac{n}{q}$ helyett. Ez esetben világos, hogy

$$s'_n \geq \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{\frac{n}{q}}}{\frac{n}{q}} \right)^q$$

$x \leq 1$ esetén, mert a jobboldali részen nem mentünk el x^n hatványig, tehát

$$\liminf_{n=\infty} \frac{s'_n(1)}{\log^q n} \geq \lim_{n=\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^q}{\log^q n} = 1$$

mit (2)-vel összevetve

$$\lim_{n=\infty} \frac{s'_n(1)}{\log^q n} = 1$$

vagy PRINGSHEIM idézett lemmájának ismételt alkalmazásával tetszőleges egész k -rendű közepekre

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n^{(k)}}{\log^q n} = 1.$$

Vizsgáljuk most a $\varphi(x)$ függvényhez tartozó s''_n részletösszegeket s a belőlük képezett aritmetikai közepeket.

Minthogy $\varphi(x)$ a vizsgált pontban negatívrendű, tehát a $\lim_{n^k} \frac{a^n}{n^k} = 0$ föltételnél fogva a hozzátartozó k -adik aritmetikai közép véges és $\log^q n$ -nel osztva zérust ad. Ugyancsak zérust adnak a q -nál kisebb hatványú logaritmus tagok is, tehát az egész $f(x)$ függvény együtthatóiból képezett aritmetikai közepekre nézve is áll, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n^{(k)}(1)}{\log^q n} = A_q$$

s ezzel tételünket bebizonyítottuk. A q -adik hatványú tag levonása után ugyanezen eljárással meghatározhatjuk egymásután az $A_{q-1} \dots A_1$ numerikus együtthatókat, melyek jellemzik a szingularitást.

9. Térjünk most át arra az általánosabb esetre, mikor a szingularitás természetét feltüntető rész azt mutatja, hogy függvényünknek egyszersmind pólusa vagy algebrai pontja is van a kérdéses helyen, azaz midőn

$$f(x) = \frac{A_q P_q \left(\log \frac{1}{1-x} \right)}{(1-x)^q} + \varphi(x), \quad (B)$$

hol $P_q(x)$ q -ad fokú polinóm x -ben és $\varphi(x)$ rendje az 1 pontban kisebb mint ρ , mely tetszőleges pozitív szám. Egyelőre az

$$f(x) = A \frac{\log^q \frac{1}{1-x}}{(1-x)^\rho} + \varphi(x) \quad (B_1)$$

egyszerűbb, de önként általánosítható esetet vizsgáljuk.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A \frac{\log^q \frac{1}{1-x}}{(1-x)^\rho} \text{ függvény részletösszegeinek neve } s_n^{(q\rho)}$$

$$A \log^q \frac{1}{1-x} \quad " \quad " \quad " \quad s_n^{(q)}$$

$$Az \frac{1}{(1-x)^\rho} \quad " \quad " \quad " \quad s_n^{(\rho)}$$

Tudjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(q)}}{\log^q n} = 1$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(\rho)}}{n^\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}.$$

Könnyű belátni, hogy

$$s_n^{(q\rho)} < s_n^{(q)} s_n^{(\rho)}.$$

Ugyanis ha

$$s_n^q = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

$$s_n^\rho = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n,$$

akkor

$$\frac{\log^q \frac{1}{1-x}}{(1-x)^\rho} =$$

$$= [a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + R_\alpha(x)] [\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n + R_\rho(x)],$$

hol $R_\alpha(x)$ és $R_\rho(x)$ a sornak az n -edik tagon túli részét jelentik. S ha e szorzat két tényezőjéből össze akarjuk állítani a

$$\frac{\log^q \frac{1}{1-x}}{(1-x)^q}$$

függvény részletösszegeit, akkor egyrészt látjuk, hogy az $s_n^{(q)} s_n^{(q)}$ szorzatban már szerepel x -nek n -edik hatványa, másrészt bármelyik részletösszegnek a hozzátartozó R -rel való szorzata x -nek csak n -nél magasabb hatványait tartalmazza. Az x -nek 1-től n -ig menő hatványai tehát mind benne vannak az $s_n^{(q)} s_n^{(q)}$ szorzatban s azonkívül még magasabbrendű tagok. Egyenlőtlenségünk tehát igaz, a miből következik, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(q)}}{n^q \log^q n} \leq \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}. \quad (3)$$

Hogy ugyanezen kifejezés számára alsó határt is találjunk, ismételjük meg e fogást a következő módosítással. Bizonyítsuk be, hogy

$$s_n^{(q, \varrho)} > \varepsilon \binom{k-1}{k} n \cdot s_\varepsilon^{(\varrho)} \left(\frac{n}{k} \right), \quad k > 1$$

hol ε a zárójelben levő mennyiség egészszámú részét jelenti. Rövidség kedvéért legyen

$$\varepsilon \left(\frac{k-1}{k} n \right) = r,$$

$$\varepsilon \left(\frac{n}{k} \right) = s.$$

Függvényünk akkor így írható

$$\frac{\log^q \frac{1}{1-x}}{(1-x)^q} = [s_r^{(q)} + R_r(x)] [s_s^{(q)} + R_s(x)],$$

hol az $R_r(x)$ és $R_s(x)$ ismét a sor maradékát jelentik.

Látjuk, hogy az $s_r^{(q)} s_s^{(q)}$ szorzatban x legmagasabb hatványa

$$r+s \leq \frac{k-1}{k} n + \frac{n}{k} = n,$$

tehát

$$s_r^{(q)} s_s^{(\varrho)} \leq s_n^{(q, \varrho)}. \quad (4)$$

Az r és s kiküszöbölése céljából jegyezzük meg, hogy

$$r = \eta \frac{k-1}{k} n,$$

hol $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta = 1$; tehát

$$\frac{\log r}{\log n} = 1.$$

Továbbá

$$s = \frac{n}{k} + \vartheta,$$

hol ϑ valódi tört s így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s}{n} = \frac{1}{k}.$$

Ezek segélyével a már ismert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{s_r^{(q)}}{(\log r)^q} = 1$$

és

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s_s^{(\varrho)}}{s_s^{(q)}} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}$$

egyenletek átmennek a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_r^{(q)}}{(\log n)^q} = 1 \quad (5)$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_s^{(\varrho)}}{n^{\varrho}} = \frac{1}{k^{\varrho} \Gamma(\rho+1)} \quad (6)$$

egyenletekbe.

Azonban k az egységhez tetszőlegesen közelíthető. Ennek alapján a keresett határérték nem lehet más, mint $\frac{1}{\Gamma(\rho+1)}$. Ugyanis (4), (5) és (6) miatt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(q, \varrho)}}{n^{\varrho} \log^q n} \geq \frac{1}{k^{\varrho} \Gamma(\rho+1)}. \quad (7)$$

Azonban k helyett 1 is tehető, mert ha csak $k_0 > 1$ esetben állana a legutóbbi határegyenlőség, azonnal találhatnánk egy

$$1 < k_1 < k_0$$

számot, melyre szintén állnia kellene, mivel k -ra csak azt a kikötést tettük, hogy 1-nél nagyobb legyen s a miből már a kisebb k_1 -re nézve következne, hogy

$$\liminf_{n=\infty} \frac{s_{\varepsilon}\left(\frac{n}{k_1}\right)}{n^{\varepsilon}} \geq \frac{1}{k_1^{\varepsilon} \Gamma(\rho+1)}$$

és így tovább az 1-et tetszőlegesen megközelítő k_w -ig s így keresett hatáértékünk

$$\liminf_{n=\infty} \frac{s_n^{(q, \varrho)}}{n^{\varrho} \log^q n} \geq \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}$$

a mit (3)-mal összevetve nyerjük a következő igen fontos lemmát

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(q, \varrho)}}{n^{\varrho} \log^q n} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}. \quad (8)$$

10. Az aritmetikai közepekre térünk át. Egyelőre $\sigma_n^{(\alpha)}$ -val csak a logaritmikus részből képezett közepeket jelölve a definíció szerint

$$\sigma_n^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha+1) \frac{S_n^{(\alpha)}}{n^{\alpha}},$$

hol

$$S_n^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^n B_{n-i}^{(\alpha+1)} c_i = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+n-i+1)}{\Gamma(n-i+1)} c_i$$

$B_{n-1}^{(\alpha+1)}$ -vel jelezve a binomiális együtthatókat, úgy hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{\alpha} x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}},$$

továbbá c_i -vel jelöltük az adott függvény együtthatóit.

Ismeretes, hogy

$$\frac{\log^q \frac{1}{1-x}}{(1-x)^{\varrho+k-\varrho+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-\varrho} x^n,$$

a hol a fenti definíció szerint

$$S_n^{(k-\varrho)} = \frac{1}{\Gamma(k-\rho+1)} \sigma_n^{(k-\varrho)} n^{k-\varrho}$$

s ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-\varrho} \sigma_n^{(k-\varrho)}}{n^k \log^q n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{(k-\varrho)}}{n^{\varrho} \log^q n} = \frac{\Gamma(k-\rho+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

Hogy ezt az eredményt a logaritmikus pólus teljes tárgyalása érdekében az egész $f(x)$ függvény együtthatóiból képezett közepekre is kiterjeszthessük, csak azt kell belátnunk, hogy a $\varphi(x)$ függvény együtthatóiból képezett aritmetikai közepek $n^k \log^q n$ -nel osztva zérussá válnak. E célból bontsuk két részre HADAMARD idézett tétele szerint a $\varphi(x)$ függvényt úgy, hogy a

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$$

kifejezésben a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ függvény az egész körön ρ -nál kisebbrendű legyen, a $\sum \beta_n x^n$ függvénynek pedig másutt tetszőleges szingularitásai legyenek kivéve a vizsgált 1 pontot, hol reguláris. Ebből egyrészt, minthogy e függvény s_n -jeinek k -adik aritmetikai közepe már véges, belátható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n}{n^{\varrho} \log^q n} = 0,$$

másrészt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ függvénynek ρ -nál kisebb rendje

$$\varrho = 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n|}{\log n},$$

vagyis ha n -nel elég messze megyünk, a

$$\frac{\log |a_n|}{\log n} < \varrho - 1 + \varepsilon,$$

hol ε tetszőleges kicsiny pozitív szám, tehát

$$\log |a_n| < (\varrho - 1 + \varepsilon) \log n = \log n^{\varrho-1+\varepsilon},$$

vagyis a logaritmusok elhagyásával

$$|a_n| < n^{\Omega-1+\varepsilon}.$$

Minthogy PRINGSHEIM idézett tétele szerint a részletösszegek rendje egygyel haladja meg az együtthatók rendjét

$$|s_n''| = |a_0 + a_1 + \dots + a_n| < n^{\Omega+\varepsilon}.$$

Ebből tekintetbe véve, hogy az Ω és ρ véges számok közt

$$\Omega < \rho$$

egyenlőtlenség áll fenn és hogy ε tetszőleges kicsi, lehet ε -t oly kicsire választani, hogy

$$\Omega + \varepsilon < \rho$$

s ez esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_n''|}{n^\rho} = 0$$

s annál inkább

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^{(k-\rho)}}{n^k \log^q n} = 0$$

a $\varphi(x)$ függvény befolyása tehát nem változtat eredményeinken, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^{(k-\rho)}}{n^k \log^q n} = A,$$

hol $\sigma_n^{(k-\rho)}$ az eredeti $f(x)$ függvényre vonatkozik. Ez az a tétel, a mit be akartunk bizonyítani s mely szerint a (B) függvényalak, azaz q -adrendű logaritmikus ponttal kombinált ρ -ad rendű pólus esetében, a (k) alatti kikötés mellett már a $(k-\rho)$ -adik aritmetikai közép elárulja a szingularitás természetét s megadja az A együtthatót teljesen jellemezve ezáltal a szingularitást.

Ugyanezen okoskodás ismétlésével nyerjük az esetben, mikor a tanulmányozott szinguláris rész maga is összeg, a következő tételt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^{(k-\rho)}}{n^k \log^q n} = A_q,$$

mert

$$\lim \frac{s_n^{(q', q')}}{s_n^{(q, q)}} = 0$$

mihelyt a következő két eset valamelyike fennáll:

1. $\rho' < \rho$ vagy
2. ha $\rho' = \rho$, de $q' < q$.

E tétel segítségével egymásután határozhatjuk meg az A_q, A_{q-1}, \dots, A_1 számbeli együtthatókat s így a *logaritmikus pólust ez összetettebb formájában is kimerítően tanulmányozhatjuk az aritmetikai közepek segítségével.*

Mielőtt az összetartási kör határait túllépnök, felhívjuk a figyelmet (8) alatti lemmánk alapvető fontosságára, melyet jelen bizonyításunkban lényegesen kihasználtunk s melynek ugyanily arányú szerepét fogjuk látni általánosabb, sőt legáltalánosabb megfontolásainkban is. Ez okból s minthogy ez a főeredmény, mit az eddigiekből a következőkbe átviszünk, azt itt újból és teljesebben formulázzuk. *Ha q és ρ tetszőleges pozitív számok, akkor a*

$$\frac{\log^q \frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}}}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^q}$$

függvény $s_n^{(q, q)}(x_0)$ részletösszegeinek nagyságrendjét a következő határegyenlőség adja meg

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(q, q)}(x_0)}{n^q \log^q n} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)},$$

azaz a növekedés vizsgálata szempontjából e részletösszegek $n^q \log^q n$ kifejezéssel helyettesíthetők.

A következőkben az összetartási kör kerületéről a BOREL-féle exponenciális összeg felhasználásával az összegezési sokszög kerületére térünk át, melyből a vizsgálat természeténél fogva csak a szögpontokat fogjuk kizárni. Ezek leszámításával eredményeink e sokszög oldalain bárhol elhelyezett szinguláris

pontokra is érvényesek lesznek. Előbb a logaritmikus pontokat, azután a logaritmikus pólusokat s végül az algebrai s a logaritmikus algebrai pontokat vesszük vizsgálat alá.

Egyszerű logaritmikus pontok és logaritmikus pólusok az összegezési sokszög oldalain.

11. A BOREL-féle exponenciális összeg segítségével minden, az összegezési sokszög belsejébe eső pontban megkapjuk a függvény értékét. Ugyanez az összeg megadja a függvény értékét e sokszög oldalainak (a szögpontokat kivéve) minden negatívrendű pontjában és jellemzi a numerikus együtthatók meghatározásával a függvény viselkedését a pólusokban s az algebrai pontokban is.¹ A következőkben látni fogjuk, hogy ugyanez összeg a logaritmikus pontokban, logaritmikus pólusokban s logaritmikus algebrai pontokban is képes az ábrázolt függvény jellemzésére *bármilyen együtthatók esetében is*.

Bevezetésül egy igen egyszerű megfontolást óhajtunk bemutatni, mely, az exponenciális összeg integrál-formájának kihasználásával, egészen közvetlenül mutatja meg a függvény viselkedését valamely egyszerű logaritmikus elágazó pontban, vagyis oly $x_0=1$ pontban, hol a függvény az (A) alatti formában írható, melyben $\varphi(x)$ a vizsgált pontban negatívrendű. Az eredmény a következő:

Egyszerű, elsőrendű logaritmikus elágazó pontban az exponenciális összeg $s(a)$ úgy nő, mint $\log a$, azaz

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s(a)}{\log a} = A$$

az exponenciális összeg segítségével tehát logaritmikus pontban teljesen jellemezhetjük a függvény viselkedését.

Nevezzük el a $\log \frac{1}{1-x}$ függvény exponenciális összegét $s'(a)$ -nak, s a $\varphi(x)$ függvényét $s''(a)$ -nak úgy, hogy

¹ P. DIENES: Essai etc. §§ IX és XIII.

$$s(a) = A \cdot s'(a) + s''(a),$$

hol $\varphi(x)$ negatív rendjénél fogva a negatívrendű helyekre általunk bebizonyított tétel értelmében $\lim_{a \rightarrow \infty} s''(a) = \varphi(1)$ s így

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s''(a)}{\log a} = 0,$$

tehát $s'(a)$ vizsgálata elegendő.

A bizonyítás a következő. Az exponenciális összeg integrálformája

$$s(a) = \int_0^a e^{-a} \left(u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1 \cdot 2} + \dots \right) da,$$

melynek a mi esetünkre alkalmazott formája

$$s'(a) = \int_0^a e^{-a} \left(a + \frac{1}{2} \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{a^3}{3!} + \dots \right) da.$$

Függvényünk az 1 pontban épen úgy viselkedik, mint a

$$\frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

függvény, vagy pontosabban

$$\frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x} = \log \frac{1}{1-x} + \frac{1-x}{x} \log \frac{1}{1-x},$$

hol az utolsó tag az 1 sugarú kör belsejében szabályos és a körön -1 -rendű, tehát a $\log \frac{1}{1-x}$ helyett az $\frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x}$ függvény exponenciális összegét képezve

$$s'(a) = \int_0^a e^{-a} \left(1 + \frac{a}{2!} + \frac{a^2}{3!} + \dots \right) da$$

kifejezést kapjuk. A zárójelben levő sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)!} = \frac{e^a - 1}{a},$$

úgy hogy

$$s'(a) = \int_0^a \frac{1-e^{-a}}{a} da.$$

Az integrál alsó határának megváltoztatására vegyük figyelembe, hogy

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-a}}{a} da = \text{const.},$$

a mi az $1-e^{-a}$ függvény sorbafejtéséből látható. Így

$$s'(a) = \text{const.} + \int_1^a \frac{da}{a} - \int_1^a \frac{e^{-a}}{a} da.$$

Minthogy

$$\int_1^a \frac{da}{ae^a} < \int_1^a \frac{da}{e^a} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^a},$$

tehát

$$s'(a) > \text{const.} + \log a - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^a}$$

s így $\log a$ -val végig osztva

$$\liminf_{a=\infty} \frac{s'(a)}{\log a} \geq 1. \quad (9)$$

Másrészt, ha az integrál alatti $\frac{1}{a}$ -nak a felső határán fölvetett értékét kiemeljük, kisebbitünk, azaz

$$\int_1^a \frac{da}{ae^a} > \frac{1}{a} \int_1^a \frac{da}{e^a} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^a} \right)$$

s így

$$s'(a) < \text{const.} + \log a - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^a} \right),$$

azaz

$$\limsup_{a=\infty} \frac{s'(a)}{\log a} \leq 1,$$

azaz ezt (9)-czel összevetve

$$\lim_{a=\infty} \frac{s'(a)}{\log a} = 1.$$

Minthogy azonban $s''(a)$ véges, tehát

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s(a)}{\log a} = A, \quad (10)$$

tehát az *exponenciális összeg az összetartási körön vagy az összegezési sokszög oldalain fekvő egyszerű logaritmikus elágazó pontokban úgy nő, mint a logaritmus, bárminők is a függvényt meghatározó TAYLOR-együtthatók.*

12. Látjuk, hogy a logaritmus függvény egyszerű együtthatóinak kihasználásával sikerült az exponenciális függvény növekedését megbecsülnünk az egyszerű logaritmikus elágazó pontokban. A legközelebb fekvő gondolat volna e módszer megtartásával ez integrálalakon folytatni vizsgálatainkat a magasabbrendű logaritmikus elágazó pontokra vonatkozólag. Ez a módszer azonban a logaritmusnak a hatványozással rohamosan komplikálódó együtthatói miatt az egynél magasabb hatványtól kezdve már igen nehézkessé válik s bonyolult számításokra vezet. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha meggondoljuk, hogy már

$$\log^3 \frac{1}{1-x} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(n-i)i} \right) x^n.$$

Azonban az egész függvények növekedésére vonatkozó megfontolások segítségével használhatóbb eszközökhöz és általánosabb eredményekhez juthatunk s a magasabbrendű logaritmikus pontok vizsgálatában ezen eszközök segítségével nem az integrál-alakon, hanem az összeg-alakon fogjuk vizsgálni az exponenciális összeg tulajdonságait.

Mielőtt azonban ezekhez a vizsgálatokhoz fognánk, bemutatjuk egyszerű logaritmikus pólusokra vonatkozó eredményeinket, melyek a magasabbrendű logaritmikus pólusokra is kiterjeszthetők, mielőtt a magasabbrendű logaritmikus elágazó pontokra vonatkozólag a kérdés megoldatott.

Bebizonyítjuk, hogy ha a függvénynek valamely $x_0 = 1$ pontjában logaritmikus pólusa van, azaz így írható

$$f(x) = A \frac{\log \frac{1}{1-x}}{(1-x)^a} + \varphi(x),$$

hol $\varphi(x)$ rendje, a^1 , a vizsgált pontban kisebb, mint a , akkor

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s(a)}{a^a \log a} = \frac{A}{a!},$$

vagyis az exponenciális összeg segítségével a függvény ily pontokban is teljesen jellemezhető.

Ebben a megfontolásban az exponenciális összeg eredeti formáját használjuk, mely a következő

$$s(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n!} s_n(x_0) \right) \cdot e^{-a},$$

hol

$$s_n(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_n x_0^n$$

és az elsőfokú logaritmikus pontokra vonatkozólag találtak szerint (10), ha a függvényünknek csak ily szingularitása van

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s(a)}{\log a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \log n}{\log a} = A,$$

a hol a $\log \frac{1}{1-x}$ részletösszegei helyett a velük egyenlő növekedésű $\log n$ függvényt írtuk a képletbe (8) szerint.

A jelen esetben, a $\frac{\log \frac{1}{1-x}}{(1-x)^a}$ exponenciális összegét ismét $s'(a)$ -val, a $\varphi(x)$ -nek megfelelőt pedig $s''(a)$ -val jelölve, a mint pl. a CESÁRO-féle sorösszehasonlítással látható, ha ezt

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{a'} \frac{a^n}{n!}$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+\alpha}}{n!}$$

sorokra alkalmazzuk, írhatjuk hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s''(a)}{a^\alpha \log a} = 0,$$

tehát csak $s'(a)$ -val kell foglalkoznunk. Ha $\alpha=1$, (8) szerint

$$s'(a) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} n \log n}{e^a}$$

$s'(a)$ számlálójában szereplő függvény helyett vizsgálhatjuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} \log n = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \log(n+1)$$

függvényt s így

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s'(a)}{a \log a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \log n}{e^a \log a} = 1.$$

Abban az esetben, mikor α tetszőleges egész szám, a singuláris rész exponenciális összege úgy nő, mint

$$\frac{\sum_{n=\alpha}^{\infty} n(n-1) \dots (n-\alpha+1) \frac{a^n}{n!} \log n}{\alpha! e^a}$$

egyszerűbben, mint

$$\frac{\sum_{n=\alpha}^{\infty} \frac{a^n}{(n-\alpha)!} \log n}{\alpha! e^a},$$

honnan a^α kiemelve és $\log n$ helyett $\log(n-\alpha)$ számot írva, mi a növekedésen nem változtat, nyerem, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{a^a \sum \frac{a^{n-a}}{(n-a)!} \log(n-a)}{a! e^a a^a \log a} = \lim_{a=\infty} \frac{s'(a)}{a^a \log a} = \frac{1}{a!}$$

s minthogy $\varphi(x)$ rendje a -nál kisebb,

$$\lim_{a=\infty} \frac{s(a)}{a^a \log a} = \frac{A}{a!}$$

egyenlőség, azaz kimondott tételünk is be van bizonyítva. Az exponenciális összeg a logaritmikus pólusokban úgy nő, mint a pólus rendjének megfelelő hatvány s a logaritmus szorzata.

Látni fogjuk, hogy ez az eredmény a logaritmus bármely egész hatványára kiterjeszthető, tehát ez eredmény alapján bármely egész rendű logaritmussal egyesített bármely rendű pólus az összegezési sokszög határán megvizsgáltnak tekinthető.

A magasabbrendű logaritmikus pontokra vonatkozó eredmények érdekében szükségünk van az egész függvények, különösen az e^a függvény növekedésére vonatkozó összefüggésekre, melyeket előbb a logaritmikus pontok vizsgálata érdekében egyszerűsítve speciális esetre adunk, hogy azután az algebrai ponttal kombinált logaritmikus pontok érdekében általánosabban is formulázzuk.

Dienes Valéria és Dienes Pál.

A MEDIUM ARITHMETICO-GEOMETRICUMRÓL.

1. A következőkben az algebrailag értelmezett medium arithmetico-geometricumot összehasonlítjuk a transcendens módon értelmezettel.

Ha a_1, a_2 tetszőleges komplex számok és

$$^{(i+1)}a_1 = \frac{1}{2} (^{(i)}a_1 + ^{(i)}a_2), \quad ^{(i+1)}a_2 = ^{(i)}a_1 ^{(i)}a_2, \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

hol $^{(0)}a_\nu = a_\nu$ ($\nu=1, 2$), akkor $\lim_{i=\infty} ^{(i)}a_\nu$ léteznek és pedig

$$\lim_{i=\infty} ^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} ^{(i)}a_2, \quad (2)$$

bármiként is választjuk $^{(i+1)}a_2$ -t, ha csak az (1) alatti algoritmus «iteratív», vagyis successive $i=1, 2, 3, \dots$ mellett az $^{(i+1)}a_\nu$ -ket azon $^{(i)}a_\nu$ -kből származtatjuk, a melyek az $^{(i-1)}a_\nu$ -kből származtak.¹

A (2) alatti közös határérték az a_1, a_2 számok medium arithmetico-geometricuma. Jelöljük $M(a_1, a_2)$ -vel. Ezen M függvény általában többértékű, az $^{(i)}a_\nu$ s így $\lim_{i=\infty} ^{(i)}a_\nu$ többértékűségének megfelelően.

★

Ha

$$a_1 a_2 (a_1 \pm a_2) \neq 0, \quad (3)$$

akkor² van oly lényegesen positiv képzetes részű ω , hogy

¹ V. ö. szerző dolgozatát: Az algebrai iteratio elméletéhez. Math. és Természettud. Ért. XXVI.

² V. ö. szerző dolgozatát: A Gauss-féle medium arithmetico-geometricum etc. Math. és Phys. L. XV. p. 11. (3), (1) és p. 12. (4). Collisio elkerülése végett itt mások egyes jelölések. Ezen említett dolgozat módszertani változtatásokkal németül is megjelent: Math. u. Naturwiss. Ber. aus Ungarn. XXV. p. 153. etc.

$$a_1 = \mu \vartheta_{00}^2(\omega), \quad a_2 = \mu \vartheta_{01}^2(\omega),$$

(hol tehát $\mu \neq 0$). Továbbá $\omega_i = 2^i \omega$ és

$$\begin{aligned} b_i &= \mu \vartheta_{00}^2(\omega_i), \\ c_i &= \mu \vartheta_{01}^2(\omega_i), \\ (i=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4)$$

téve, hol

$$\omega_0 = \omega, \quad b_0 = a_1, \quad c_0 = a_2,$$

lesz:

$$b_{i+1} = \frac{1}{2}(b_i + c_i), \quad c_{i+1}^2 = b_i c_i, \quad (5)$$

$$\lim_{i=\infty} b_i = \lim_{i=\infty} c_i = \mu.$$

Tehát a μ , (1) és (2) szerint az $M(a_1, a_2)$ egyik értéke.

★

Gondoljuk már most, hogy a (4)-ben ω fölveszi mindazon, lényegesen pozitív képzetes részű értékeket, melyeknél

$$\frac{b_0}{c_0} \text{ azaz } \frac{a_1}{a_2}$$

változatlan marad. Ha ekkor magát b_0 és c_0 -at (azaz a_1 és a_2 -öt) akarjuk változatlanoknak hagyni, úgy μ -nek kell más és más értékeket tulajdonítani. Mivel azonban az (5) akkor is áll, azért e más és más μ értékek is az $M(a_1, a_2)$ egy-egy (zérustól különböző) értékét szolgáltatják.

Ezekután önként kínálkoznak e kérdések:

Minő összefüggésben állanak egymással e μ értékek?

Az $M(a_1, a_2)$ esetleges¹ zérus értékétől eltekintve, e μ értékek kimerítik-e és hogyan az $M(a_1, a_2)$ értékeket?

Föl kell tételoznünk, hogy áll a (3). Ez azonban kérdéseink szempontjából sem lényeges föltevés, mivel ha (3) nem teljesül, akkor $M(a_1, a_2)$ -nek egy vagy két, a_1 és a_2 -ből közvetlenül megadható értéke van. Ugyanis, ha (3) nem áll, akkor csakis a következő, egymást ki nem záró, esetek lehetségesek:

¹ Itt nincs szükségünk fejtegetni, hogy $M(a_1, a_2)$ egyik értéke mindig zérus. V. ö. szerző dolgozatát: Crelle, 135. p. 73.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = a_2, \quad a_1 = -a_2.$$

Az első két esetben (1) szerint mindenik ${}^{(i)}a_2$ ($i=1, 2, 3, \dots$) zérus, tehát $M(a_1, a_2)$ is az. A harmadik esetben $M(a_1, a_2)$ vagy a_1 , vagy zérus, a szerint, hogy (1)-ben ${}^{(i+1)}a_2$ melyik értékét vesszük. A negyedik esetben ${}^{(1)}a_1 = 0$, tehát ${}^{(i)}a_2 = 0$ ($i=2, 3, \dots$) s így $M(a_1, a_2)$ is zérus.

2. A modulfüggvények elméletének néhány eredményét, czéljainknak megfelelően formulázva, előrebocsátjuk.

a) «Ha

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

hol $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ egészek, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ és

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod } 4)$$

akkor és csakis akkor ¹

$$a_1 : a_2 = \vartheta_{00}^2(\omega) : \vartheta_{01}^2(\omega) = \vartheta_{00}^2(\omega') : \vartheta_{01}^2(\omega').$$

b) «Ha a) alatt mod 4 helyett mod 2 áll, akkor és csakis akkor ²

$$a_1^2 : a_2^2 = \vartheta_{00}^4(\omega) : \vartheta_{01}^4(\omega) = \vartheta_{00}^4(\omega') : \vartheta_{01}^4(\omega').$$

Ekkor még

$$\vartheta_{00}^2(\omega') = (\gamma\omega + \delta) \vartheta_{00}^2(\omega).$$

A b) alatti utolsó egyenlet természetesen akkor is áll, ha mod 2 helyett mod 4-et írunk. Ekkor azonban még

$$\vartheta_{01}^2(\omega') = (\gamma\omega + \delta) \vartheta_{01}^2(\omega),$$

mert csak így marad, mint a) kívánja $\frac{a_1}{a_2}$ változatlan.

¹ FRICKE-KLEIN: Vorlesungen ü. d. Theorie d. automorph. Funkt. I. (1897), p. 663.

² WEBER: Ellipt. Funkt. etc. (1891), p. 140—141. alapján a $x^2 + x'^2 = 1$ segélyével (p. 110).

Tehát:

c) «Az a) alatti substitutió nál

$$\begin{aligned}\vartheta_{00}^2(\omega') &= (\gamma\omega + \delta) \vartheta_{00}^2(\omega), \\ \vartheta_{01}^2(\omega') &= (\gamma\omega + \delta) \vartheta_{01}^2(\omega).\end{aligned}$$

Első kérdésünkre ezek segélyével megfelelhetünk. A (4)-ben $b_0 = a_1$, $c_0 = a_2$ -öt állandóknak tartva, μ helyett csakis oly μ' -ket írhatunk, melyekhez megfelelő ω tartozik. Mivel $\frac{b_0}{c_0}$ is állandó marad, azért a μ' -höz tartozó ω -t ω' -vel jelölve: ω' az ω -ból egy a) alatti substitúcióval keletkezik. És fordítva: minden ily ω' -höz tartozik megfelelő $\mu' \neq 0$, úgy hogy b_0 , c_0 változatlanok maradnak.

Az 1. szerint μ' is $M(a_1, a_2)$ érték. És e μ' értékek között vannak az összes oly $M(a_1, a_2)$ értékek, melyek (4)-nél, mint arányossági paraméterek szerepelhetnek. A c) közvetlenül adja az összefüggést

$$\mu' = \frac{\mu}{\gamma\omega + \delta}, \quad (6)$$

($\gamma \equiv 0, \delta \equiv 1, (\text{mod } 4)$)

mint feleletet az első kérdésre.

3. A második kérdés elintézéséhez előbb a következő föladatot kell megoldanunk: megállapítandó egy oly substitutio, melyet ω -ra alkalmazva a keletkező ω' képzetes része lényegesen pozitív, továbbá $\frac{b_i}{c_i}$ ($i=0, 1, \dots, \lambda$) változatlanok maradnak, $\frac{b_{\lambda+1}}{c_{\lambda+1}}$ pedig jegyet változtat.

Ahelyett, hogy származtatnánk egy ilyent, kimutatjuk, hogy megfelel föladatunknak a következő substitutio:

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}; \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= 1, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{4}; \\ \gamma &= 2^{2+2r},\end{aligned} \quad (7)$$

hol $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ egészek, r pedig tetszőleges páratlan egész szám.

Ugyanis $a)$ és (4) szerint $\frac{b_i}{c_i}$ ($i = 0, 1, \dots, \lambda$) változatlan marad, ha $2^i \omega'$ a $2^i \omega$ -ból valamely $a)$ alatti substitúcióval keletkezik. Azaz, ha

$$2^i \frac{a\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = \frac{\alpha_i 2^i \omega + \beta_i}{\gamma_i 2^i \omega + \delta_i},$$

($i = 0, 1, \dots, \lambda$)

hol $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ valamely $a)$ alatti substitúció. De (7) szerint tényleg teljesülnek az $a)$ alatti föltételek $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ -nál, ha

$$\alpha_i = \alpha, \quad \beta_i = 2^i \beta, \quad \gamma_i = \frac{1}{2^i} \gamma, \quad \delta_i = \delta.$$

($i = 0, 1, \dots, \lambda$)

Hasonlókép, mivel $2^{\lambda+1} \omega'$ a $2^{\lambda+1} \omega$ -ból egy $b)$ alá tartozó $\begin{pmatrix} \alpha_{\lambda+1} & \beta_{\lambda+1} \\ \gamma_{\lambda+1} & \delta_{\lambda+1} \end{pmatrix}$ substitúcióval keletkezik, hol

$$\alpha_{\lambda+1} = \alpha, \quad \beta_{\lambda+1} = 2^{\lambda+1} \beta, \quad \gamma_{\lambda+1} = \frac{1}{2^{\lambda+1}} \gamma, \quad \delta_{\lambda+1} = \delta,$$

azért $\frac{b_{\lambda+1}^2}{c_{\lambda+1}^2}$ változatlan marad. De e substitúció nem tartozik az $a)$ alattiakhoz, lévén (7) szerint $\gamma_{\lambda+1} = 2r \not\equiv 0 \pmod{4}$. Tehát $\frac{b_{\lambda+1}}{c_{\lambda+1}}$ jegyet változtat. A (7) alatti substitúció ezek szerint valóban megfelel föladatunknak.¹

Második kérdésünkre már most így felelhetünk meg. Legyen adva az (1)-nek, illetőleg (5)-nek megfelelő két végtelen matrix :

$$\begin{array}{cc} a_1, & a_2 & a_1, & a_2 \\ {}^{(1)}a_1, & {}^{(1)}a_2 & b_1, & c_1 \\ {}^{(2)}a_1, & {}^{(2)}a_2 & b_2, & c_2 \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \end{array}$$

¹ Az ω' képzetes része lényegesen pozitív: WEBER, l. c.

Ha a jobbfelőli matrix bármelyik eleme egyenlő a balfelőli matrix megfelelő helyt álló elemével, vagyis $b_s = {}^{(s)}a_1$, $c_s = {}^{(s)}a_2$ ($s = 1, 2, \dots$), akkor az előbbi matrixhoz tartozó μ érték is egyenlő az utóbbihoz tartozó $M(a_1, a_2)$ értékkel. Tegyük föl azonban, hogy van eltérés a két matrix között és pedig először például bizonyos s -ik sorban, vagyis ${}^{(s-1)}a_2 = -c_{s-1}$. Alkalmazunk ekkor ω -ra egy (7) alatti substitutiót $\lambda + 1 = s - 1$ téve. Ekkor (4)-ben μ helyett oly μ' írható, hogy a jobbfelőli matrix helyett olyant nyerünk, melynek első $s - 1$ sora ugyanaz és melynek s -ik sora

$$b_{s-1} = {}^{(s-1)}a_1, \quad -c_{s-1} = {}^{(s-1)}a_2.$$

Vagyis az új matrixban először csak az $s + 1$ -ik, vagy valamely még későbbi sorban lehet eltérés a fölirt balfelőli matrixtól.

Tehát ω successiv transformatiójával elérhetjük, hogy az (5)-nek megfelelő jobboldali matrix helyébe olyan lép, melynek akárhány előirt számú, vagy még több első sora megegyezik a baloldali matrix megfelelő soraival. Az ω e successiv transformatióihoz tartozzék a μ értékek

$$\mu, \mu', \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(\sigma)}, \dots$$

sorozata. A megfelelő ω -kat sorban

$$\omega, \omega', \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(\sigma)}, \dots$$

jelöljék. Tehát bármilyen positiv egész szám is az s , van oly σ , hogy

$$\begin{aligned} {}^{(i)}a_1 &= \mu^{(\sigma)} \vartheta_{00}^2 (2^i \omega^{(\sigma)}), \\ {}^{(i)}a_2 &= \mu^{(\sigma)} \vartheta_{01}^2 (2^i \omega^{(\sigma)}). \end{aligned} \tag{8}$$

($i = 0, 1, \dots, s$)

A (2) szerint az s vehető oly nagynak, hogy

$$|{}^{(t)}a_1 - M(a_1, a_2)| < \delta, \tag{9}$$

ha δ tetszőlegesen megadott lényegesen positiv szám, mihelyt $t \geq s$. $M(a_1, a_2)$ természetesen mindig az M ugyanazon értékét jelöli. Mivel a ϑ_{00} ismert hatványsorából következik, hogy

$$\lim_{t=\infty} \vartheta_{00}^2(2^t \tilde{\omega}) = 1,$$

$\tilde{\omega}$ -val jelölve bármely lényegesen pozitív képzetes részű ω -t, azért (8) szerint, ha $t \geq s'$ és s' elég nagy

$$|{}^{(t)}a_1 - \mu^{(\sigma_t)}| < \delta,$$

hol σ_t jelöli a t -hez tartozó σ index-értéket. Ezt (9)-el egybevetve, kapjuk, hogy $\lim_{\sigma=\infty} \mu^{(\sigma)}$ létezik és pedig

$$\lim_{\sigma=\infty} \mu^{(\sigma)} = M(a_1, a_2). \quad (10)$$

Eredményeink egy részét a következőkép foglaljuk össze:

I. Ha a_1, a_2 tetszőleges komplex számok, $a_1 a_2 (a_1 \pm a_2) \neq 0$ és M jelöli az $M(a_1, a_2)$ tetszőlegesen kiválasztott, zérustól különböző értékét, akkor

$$a_1 = \mu \vartheta_{00}^2(\omega), \quad a_2 = \mu \vartheta_{01}^2(\omega)$$

téve, vagy $\mu = M$, vagy pedig van oly

$$\omega, \omega', \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(\sigma)}, \dots$$

sorozat, hol $\omega^{(\sigma)}$ az $\omega^{(\sigma-1)}$ -ből valamely (7) alatti substitutióval keletkezik, miszerint

$$a_1 = \mu^{(\sigma)} \vartheta_{00}^2(\omega^{(\sigma)}), \quad a_2 = \mu^{(\sigma)} \vartheta_{00}^2(\omega^{(\sigma)})$$

írható. Ekkor $\lim_{\sigma=\infty} \mu^{(\sigma)}$ létezik és

$$\lim_{\sigma=\infty} \mu^{(\sigma)} = M.$$

Az első kérdésre nyert (6) alatti felelethez még a következő észrevételeket fűzzük. Ha μ és ω -hoz a $\gamma \equiv 0, \delta \equiv 1 \pmod{4}$ relative törzsszámokat tetszőlegesen fölveszszük, akkor mindig vannak oly $\alpha \equiv 1, \beta \equiv 0 \pmod{4}$ egészek, hogy $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ugyanis adva γ, δ , az

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (11)$$

egyenlet α, β egész számokban mindig megoldható.¹ Ha egy

¹ L. pl. WEBER: Lehrbuch der Algebra I. (1898), p. 407—408.

megoldás α_0, β_0 , akkor az összes megoldásokat és csakis azokat adják e formulák:

$$\alpha = \alpha_0 + h\gamma, \quad \beta = \beta_0 + h\delta. \quad (12)$$

$(h=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

A (11) szerint α_0 páratlan, mert γ páros. Tehát $\alpha_0 \equiv 1, 3 \pmod{4}$. De, ha $\alpha_0 \equiv 3 \pmod{4}$ volna, akkor $\alpha_0\delta$ alakja $4m+3$ és (11)-ből $4m+2 = \beta_0\gamma$, a mi azonban lehetetlen, mert γ 4-gyel osztható. A (12)-re való tekintettel e szerint

$$\alpha \equiv \alpha_0 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Szintén (12) szerint van oly a , hogy a hozzátartozó

$$\beta \equiv 0 \pmod{4},$$

mert a $\beta_0 + h\delta \equiv 0 \pmod{4}$ h -ra megoldható, mivel δ és 4 relative törzsszámok.

Tekintetbe véve, hogy $|\gamma|, |\delta|$ a (6)-ban tetszőleges nagyoknak vehetők és minden így adódó μ' , mint 1.-ben láttuk, az $M(a_1, a_2)$ egy-egy értéke, mondhatjuk:

II. Az $M(a_1, a_2)$, ha $a_1 a_2 (a_1 \pm a_2) \neq 0$, végtelen sok értékű függvény. Értékeire nézve a zérus torlódási pont.

Az I. azt is állítja, hogy ha $a_1 a_2 (a_1 \pm a_2) \neq 0$, akkor vannak $M(a_1, a_2)$ bármely, zérustól különböző értékéhez tetszőleges közel fekvő μ értékek. Természetesen az a_1, a_2 -höz tartozó (I. (4)) μ értéket gondolva, s ezért írjuk $\mu = \mu(a_1, a_2)$. Mivel a (6)-ban $|\gamma|, |\delta|$ tetszőleges nagyoknak vehetők, azért ama megközelítés $M(a_1, a_2) = 0$ -nál is lehetséges. Tehát egész általánosan:

III. Az $M(a_1, a_2)$ bármely értékéhez, ha $a_1 a_2 (a_1 \pm a_2) \neq 0$, tartozik oly $\mu = \mu(a_1, a_2)$ érték, hogy

$$|M(a_1, a_2) - \mu| < \delta,$$

bármicsoda tetszőlegesen megadott lényegesen pozitív szám a δ .

Dávid Lajos.

A HOLD-MOZGÁS VARIÁCZIÓJA.

(Második és befejező közlemény.)

II. A variáczióális görbe mint intermediáris pálya.

A «variáczió» szó itt nem modern értelemben veendő. A variáczió a Hold-mozgás egy sajátosságát jelenti, melyet TYCHO BRAHE fedezett fel 1590 körül. A régi asztronomusok az égitesteknek az egyenletes körmozgástól való eltéréseit egyenlőtlenségeknek nevezték, s magyarázatukat az ú. n. epiciklus-elmélettel igyekeztek megadni, melyet HIPPARCHOSZ állított fel és PTOLEMÁIOSZ vitt nagy tökélyre. A Hold két legnagyobb eltérését, az ú. n. középponti egyenletet és az evekziót már HIPPARCHOSZ ismerte. Két másik egyenlőtlenségét csak több mint 17 század múlva sikerült felfedeznie BRAHÉnak: az egyik az évi egyenlet, a másik a variáczió.

Képzeljünk a Föld körül mint középpont körül nagyobb kört, a deferenst. Ha a Hold ezen mozogna egyenletes sebességgel, úgy helyét minden időre könnyen meg lehetne adni előre. A megfigyelés azonban azt mutatja, hogy a Hold e közepes helyétől eltér, hol előtte tartózkodik, hol utána marad. Hogy ezeket az eltéréseket pontosabban kiszámíthassa, BRAHE feltételezte, hogy a deferens középpontja nem esik össze állandóan a Föld középpontjával, hanem maga is kis kört ír le. Azonkívül a Hold mindenkori közepes helye körül mint középpont körül egy kisebb kört, az első epiciklust képzei, a melyen ismét egy másik még kisebb epiciklus mozog. Az utóbbin van maga a Hold. BRAHE így megközelítőleg elő tudja állítani

a középponti egyenletet, az evekciót és az évi egyenletet. Észrevette azonban, hogy ez a megközelítés nem teljes, a mennyiben a Hold pályájának minden oktansában mintegy 40'-nyi különbség maradt fenn, a melyről úgy adott számot, hogy az első epicziklus középpontját tangenciális irányban (a deferensen) eltolva képzelte a közép helyhez képest és ezt az eltolódást nevezte variácziónak.

BRAHE felfedezéséről KEPLER joggal mondhatta¹ «famosa illa Tychonis inventio, variatio dicta», a mennyiben csakugyan BRAHE kitűnő megfigyelési képességéről tesz tanúságot. Itt azonban közelebbről azért érdekel bennünket, mert éppen e variácziós egyenlőtlenségek analitikai előállítására a mozgásegyenletek alapján képezi HILL legeredetibb eszméjét, ki aképpen az égi mechanikát egy fontos és nagy horderejű eszközzel gazdagította, t. i. a periodikus megoldásokkal, melyekben POINCARÉ az e tudományban azóta tett haladások csiráját² és azt az úgyszólván egyetlen rést látja, a melyen át eddig hozzáférhetetlennek hitt területbe való behatolást megkísérthetjük.³

Láttuk fönnebb, hogy BRAHE szerint a variáczió az első epicziklus középpontjának eltolódásában áll. De ez a középpont nem más, mint a Hold mindenkori közepes helye. Következik tehát, hogy a Hold, még ha közben mozogna is a Föld körül, nem haladhatna egyenletes sebességgel, a mint azt már KEPLER megjegyzi.⁴ Sőt KEPLER, ki itt a Nap mozgató képességéről szól («virtus motrix Solis»), ezt az egyenlőtlenséget — modern szavakkal kifejezve — a Nap perturbáló erejének tulajdonítja, mintegy előre sejtve NEWTON felfedezését.

A Hold-mozgás főbb egyenlőtlenségeinek egységes mechanikai magyarázatát NEWTON adta először⁵ az ő törvénye alapján.

¹ KEPLERI: Opera omnia, ed. Frisch. Vol. VII. 527. l.

² Nouvelles méthodes, I. 3. l.

³ U. o. 82. l.

⁴ De motibus Stellæ Martis, III. kötet, 312. l. és még több helyen.

⁵ Principia Mathem. Philos. nat. liber III, prop. XXV—XXXV.

V. ö. TISSERAND: Méc. cél. III. kötet, 27—45. l.

ponens a Hold mozgását meglassítani igyekszik (újhold, első negyed); $+Y$ -tól $-X$ felé a tangenciális komponens a Hold mozgását meggyorsítja (első negyed, teli hold); a következő két negyedben, $-X$ -tól $-Y$ -ig (teli hold, utolsó negyed) lassulás és $-Y$ -tól $+X$ -ig ismét gyorsulás fog beállni (utolsó negyed, újhold).

Jelölje az 1. rajzban F a Földet, H a Holdat, N a Napot; $\overline{FH} = r$, $\overline{HN} = \rho$, $\overline{FN} = R$ az égitestek egymástól való távolságait. Azt a NEWTON-féle erőt, melyet a Nap a Holdra gyakorol, nagyság és irány szerint jelképezzük a \vec{HN} vektorral; a \vec{HA} vektor pedig jelképezze azt az erőt, melyet a Nap a Földre gyakorol, mely tehát eredetileg F -től N felé lenne irányítva, de a melyet a Holdra ellentett irányban hatónak kell képzelnünk, mivel a Földet nyugvónak tesszük fel. Az \vec{AH} és \vec{HN} erők eredője \vec{HB} nagyság és irány szerint reprezentálja a perturbáló erőt. Legyen még $\overline{FC} = p$ a Hold radius vectorának projekciója az X -tengelyen. A NEWTON-féle törvény alapján

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HN}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{HN}} = \frac{\rho^2}{R^2},$$

tehát

$$\overline{BN} = \frac{\rho^3}{R^2}.$$

De

$$\overline{FB} = \overline{FN} - \overline{BN} = R - \frac{\rho^3}{R^2} = \frac{R^3 - \rho^3}{R^2}.$$

Mivel a valóságban N igen messze van F -től és H -tól, nagy közelítéssel tehetjük $R = p + \rho$, hol p mindig igen kicsiny ρ -hoz képest. Ennélfogva

$$\overline{FB} = \frac{p^3 + 3p^2\rho + 3p\rho^2 + \rho^3 - \rho^3}{p^2 + 2p\rho + \rho^2},$$

és elhanyagolva p -t és magasabb hatványait ρ előtt

$$\overline{FB} = 3p.$$

Ez az egyszerű reláció megengedi, hogy a \overline{HB} perturbáló erőt a H minden helyzetéhez könnyen megrajzoljuk. Az $\overline{FH}=r$ projekcióját az X tengelyre, $\overline{FC}=p-t$ a C -n túl még kétszer lemérjük (H illetve C helyzete szerint természetesen $F(+X)$ vagy $F(-X)$ irányban) és az így nyert pontot a H -val összekötjük. Az erőegység \overline{AH} , \overline{HN} és \overline{HB} -re nézve ugyanaz, de ebben az ábrázolásban H -val pontról-pontra változik. \overline{HB} -t most már könnyű tangenciális és normális komponenseire bontani.

A mit fönnebb a perturbáló erő tangenciális komponenséről mondtunk, közvetlenül érthető s azt is láthatjuk, hogy ez a komponens=zérussal a D , E , I , K pontokban, melyek a Hold syzygiumainak és quadraturáinak felelnek meg, az utóbiaknak azonban szigorúan csak akkor, ha N végtelen távolságban lenne. Ennélfogva a D , E , I , K pontokban a variáció is zérus és a Hold közepes helye nem változott. Más szóval az egyenletes sebességgel haladó Hold és a tangenciális perturbáció következtében haladó Hold pl. K -ból egyszerre indulnak el és egyszerre érkeznek D -be, de a perturbált Hold K -ból kisebb sebességgel indul és D -be nagyobb sebességgel érkezik mint az egyenletesen mozognak képzelt Hold. D -ből a két képzelt Hold ismét egyszerre indul és egyszerre érkeznek E -be; de a perturbált Hold sebessége D -ben nagyobb és E -ben kisebb, mint a nem perturbált Holdé és így tovább. Ennélfogva K és D között a közepes Hold a perturbált Hold előtt halad s a helyzetük között levő különbség K és D között körülbelül a középén, az oktánsban éri el maximumát. D és E között a Hold közepes helyzete a perturbált Hold helyzete mögött marad és így tovább. Ez a BRAHE fölfedezte variáció, mely tehát csakugyan akkor is fellépne, ha a Hold körpályát írta le a Föld körül.

Csakhogy a perturbáló erő normális komponense a Hold körpályáját deformálni fogja. A normális komponens legnagyobb D -ben és I -ben és a Holdpályától kifelé $+X$, illetve $-X$ felé irányul. Ennélfogva az az erő, a mely a Holdat a Föld körüli

körpályába kényszeríti, ezekben a pontokban csökkenést szenved. De mivel

$$\text{görbület} = \frac{\text{czen tripet. gyorsulás}}{\text{sebesség négyzete}}$$

és a D és I pontokban a Hold lineáris sebessége is a legnagyobb, következik, hogy e pontokban a perturbált pálya görbülete kisebb lesz, mint a körpályáé. Az E és K pontokban a normális komponens befelé irányul, a czen tripetális gyorsulás nagyobb mint a körmozgásban s ennél fogva a görbület is nagyobb mint a körpályában.

Minden quadransban lesz egy pont, melyben a normális komponens zérus és pedig ott, hol \overline{HB} merőleges \overline{HF} -re. De akkor

$$p : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{CB} \quad \text{és} \quad \overline{CB} = 2p,$$

tehát

$$\begin{aligned}\overline{CH}^2 &= 2p^2, \\ \text{tg } HFC &= 54^\circ 44' 8'', \\ HFC &\simeq \sqrt{2},\end{aligned}$$

Ebben a négy pontban, melyek az X tengelyhez szimmetrikusan helyezkednek el, a tangenciális komponens egyszersmind a legnagyobb s a BRAHE-féle variáció ezekben éri el maximumát. A variacionális görbe, mely az előbbiek alapján D és I -nél lapultabb, e pontokban fogja metszeni az eredeti körpályát és K és E -nél a körön túl kidudorodik, úgy hogy nagyjából ellipszishez fog hasonlítani, melynek középpontja F -ben van és kis tengelye a Nap felé fordul a mint már NEWTON felismerte. A görbe valódi alakját 200 évvel a Principiák megjelenése után HILL adta meg.

Az előbb mondottakból kitűnik, hogy a variációt a perturbáló erőnek csak egy bizonyos része hozza létre. Koordináta-rendszerünk X tengelye a Napon menvén át, a Nappal együtt forog a Föld körül s így a (3) mozgásegyenletek alapjául szolgáló koordináta-rendszerhez képest is forgást végez. Valahányszor a Hold D -be ér (1. rajz), újhold van; az az idő, a

mely eltelik a míg a Hold D -ből kiindulva ismét D -be ér, egyenlő két újhold közötti idővel vagy egy szinodikus hónappal. A szinodikus hónap nagyobb mint a sziderikus, mivel a Hold míg a Nappal együtt egy csillagtól kiindulva ismét visszatér e csillaghoz, azaz leír pontosan 360° -ot (sziderikus keringés-idő), még egy bizonyos utat kénytelen megtenni, hogy a Napot utolérje (D -ben), mely ezalatt a csillagtól eltávolodott [mindez természetesen látszó mozgás, a Föld középpontjából nézve].

Legyen a Hold sziderikus keringésideje $= T_1$, a Napé T_2 , akkor a szinodikus keringésidőt, S -t meghatározza az

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

egyenlőség.

Legyen még $n_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ a Hold (sziderikus) közép mozgása, $n_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ a Napé, akkor az előbbi egyenlőségből

$$S = \frac{2\pi}{n_1 - n_2}.$$

A variáció összes lehetséges pozitív és negatív értékeit felveszi, míg a Hold D -ből I -be ér; periodusa tehát egy fél szinodikus hónap $= \frac{\pi}{n_1 - n_2}$.

Feladatunk most az, hogy megkeressük a Hold mozgásában mindazokat a tagokat, a melyeknek periodusa $= \frac{\pi}{n_1 - n_2}$.

Térjünk vissza a (3) egyenletrendszerhez. Tekintsünk el a Hold szélességétől, vagyis tegyük $z_1 = 0$; tekintsünk el a Nap-pálya excentricitásától, más szóval tegyük fel, hogy a Nap egyenletes sebességgel ($= n_2$) kering a Föld körül. E föltétel alatt egyszerűen

$$\begin{aligned} x_2 &= a_2 \cos n_2 t, \\ y_2 &= a_2 \sin n_2 t, \end{aligned} \quad (4)$$

ha a_2 jelenti a Nap közepes távolságát a Földtől. Mivel a

Föld tömege a Nap tömegének csak mintegy 330,000-edrésze, akkor a Föld tömegének elhanyagolásával

$$m_2 = n_2^2 a_2^3, \quad (5)$$

a mint a közönséges elliptikus mozgásból ismeretes. A Hold-mozgás egyenletei e szerint lesznek:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (m_0 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + (m_0 + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1}, \\ r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2, \\ \Omega_1 &= \frac{1}{A_{12}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{r_2^3}, \\ r_2^2 &= a_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \\ A_{12} &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Ha ezen egyenletekbe az (5)-ből x_2 és y_2 értékeit behelyettesítjük, látni fogjuk, hogy az idő explicite is előfordul s hogy ennél fogva a közönséges energia-integrál nem fog létezni.

Az előbbi kifejtések során láthattuk azt, hogy a variáció-nális egyenlőtlenségeket akként kapjuk, ha forgó koordináta-rendszert vezetünk be, melynek X tengelye állandóan átmegy a Napon. Ezt elérjük a következő transzformációval:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos n_2 t - y \sin n_2 t, \\ y_1 &= x \sin n_2 t + y \cos n_2 t. \end{aligned} \quad (7)$$

A (4), (5), (6), (7)-ből a kellő összevonások után találjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - n_2^2 x - 2n_2 \frac{dy}{dt} + \frac{(m_0 + m_1)x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} &= \\ &= -n_2^2 a_2^3 \left[\frac{x - a_2}{(\sqrt{a_2^2 - 2a_2 x + x^2 + y^2})^3} + \frac{1}{a_2^2} \right], \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - n_2^2 y + 2n_2 \frac{dx}{dt} + \frac{(m_0 + m_1)y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} &= \\ &= -n_2^2 a_2^3 \frac{y}{(\sqrt{a_2^2 - 2a_2 x + x^2 + y^2})^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Könnyű meggyőződni, hogy a (7) kontakt-transzformáció; ennél fogva a transzformált (8) rendszerben az idő nem fog explicite szerepelni. De előfordul még a_2 , a Nap középtávolsága a Földtől, mely a megfigyelés szerint mintegy 390-szer akkora mint a Holdnak a Földtől való középtávolsága. Tekintsünk el azoktól az ú. n. parallaktikus tagoktól, melyek a_2 -től származnak, a mennyiben a_2 előfordul a nevezőben. A (8)-ban csakugyan

$$(\sqrt{a_2^2 - 2a_2x + x^2 + y^2})^3 = a_2^3 \left(\sqrt{1 - \frac{2x}{a_2} + \frac{x^2 + y^2}{a_2^2}} \right)^3 = a_2^3$$

tehető, mivel x és y mindig kicsinyek a_2 -hez képest. Tegyük még $m_0 + m_1 = \mu$, $n_2 = n'$, akkor a (8)-ból lesz

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{\mu x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} - 3n'^2 &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{\mu y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Ezek azok a nevezetes egyenletek, melyeket HILL állított fel először s a melyek Hold-elmélete alapját képezik. Az itt adott levezetés különbözik úgy HILL, mint POINCARÉ, DARWIN és BROWN levezetéseitől, a mennyiben lépésről-lépésre engedi követni az összefüggést BRAHE érdekes megfigyelése és a mechanikai elmélet között.

Ha (9)-ben $n' = 0$ tennők, úgy megmaradnának a Hold-mozgás tisztán elliptikus egyenletei. Az egyenletek tehát a Hold elliptikus mozgásán kívül tartalmazzák mindazokat a perturbációkat, a melyek egyesegyedül a Nap középmozgásától származnak.

Míg a régibb Hold-elméletek rendesen polárkoordinátákra vannak alapítva s sokszor az idő helyett az anomáliát tartalmazzák mint független változót, addig HILL megmarad a derékszögű koordináták mellett, mert így szimmetrikus és algebrai kifejezésekhez jut.

Még egy megjegyzést kell tennünk a (7) transzformációra.

A régi x_1, y_1 koordináták csak a $T = \frac{2\pi}{n_2} = \frac{2\pi}{n'}$ -re periodikusak, míg az x és y forgó koordináták periodusa tetszőleges. Ez a megjegyzés nagyon fontos, mert láttuk fönnebb, hogy nekünk oly tagokat kell keresnünk, a melyeknek periodusa $\frac{\pi}{n_1 - n_2} = \frac{\pi}{n - n'}$, ha ezentúl $n_1 = n$ teszszük. Ezeket tehát az eredeti mozgásegyenletekből csak számtalan más, különböző periodusú taggal egyetemben nyerhettük volna, míg a (9) rendszer alkalmas lesz oly tagok előállítására, melyeknek periodusa tisztán $\frac{2\pi}{n - n'}$, vagyis a szinodikus hónap.

Szorozzuk meg a (9) egyenletek elsejét $\frac{dx}{dt}$ -vel, a másodikat $\frac{dy}{dt}$ -vel; összeadva s integrálva lesz:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{3}{2} n'^2 x^2 - C, \quad (10)$$

mely kifejezésnek HILL a «JACOBI-féle integrál» elnevezést adta.

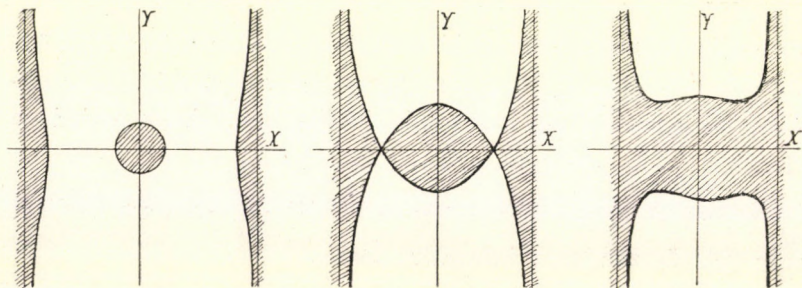
JACOBI integrálja megadja a sebesség négyzetét relative a forgó tengelyekhez. Mivel a (10) bal oldala lényegesen pozitív, ennél fogva a

$$\frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C - \frac{3}{2} n'^2 x^2$$

egyenlettel definiált hatodrendű görbe a zérus relativ sebesség görbéje, mely elválasztja a sik ama részét, a melyben a sebességek reálisak, a sik azon részétől, melyben a sebességek imagináriusok. Ez a görbe szimmetrikus úgy az x mint az y tengelyre nézve. Ha $y = \infty$, akkor $x = \pm \sqrt{\frac{2c}{3n'^2}}$, a mik az y tengelylyel párhuzamos aszimptoták. Ha $x = 0$, akkor $y = \pm \frac{\mu}{c}$, metszőpontok az y tengelylyel. Ha $y = 0$, akkor

$$x^3 - \frac{2c}{3n'^2} x + \frac{2\mu}{3n'^2} = 0.$$

A szerint, a mint $(2c)^{\frac{3}{2}} \geq 9\mu n'$, x -nek a zérus és $\sqrt{\frac{2c}{3n'^2}}$ között vagy két különböző reális értéke lesz, vagy a két érték egybe esik, vagy egy reális érték sem fog létezni. A megfelelő görbék tehát ilyen alakúak:



2. rajz.

3. rajz.

4. rajz.

A sraffirozott helyek a sík ama részeit mutatják, a melyekben a mozgás reális. A 2. rajz ábrázolta esetben, mikor $(2c)^{\frac{3}{2}} > 9\mu n'$ az m_1 égitest vagy mindig a középső oválison belül marad, vagy pedig, ha egyszer rajta kívül van, úgy a síknak csak az aszimptotikus görbéken túl levő részében mozoghat és akár a végtelenbe is távozhatik. Az előbbi mozgást stabilisnek, az utóbbit instabilisnek mondhatjuk. Látjuk, hogy ez a mozgás stabilitásának új definíciója, mely független az időtől s ebben különbözik a stabilitás szokásos egyéb definícióitól.

Ha egységül vesszük a közép-napnapot és a Föld ekvatoriális sugarát, úgy

$$\mu = 11609 \cdot 014,$$

$$n' = 0 \cdot 017202124,$$

$$C = 111 \cdot 18883.$$

Ennélfogva az aszimptoták távolsága a kezdőponttól (a Földtől) $= \pm 500 \cdot 4992$, az ovális két metszéspontja az x tengelyen $= \pm 109 \cdot 6772$, az y tengelyen $= \pm 104 \cdot 41$, a görbe két végtelen ágának metszéspontjai az x tengelylyel pedig $= \pm 435 \cdot 5623$. A Hold közepes távolsága a Földtől $= 60$ földszugár. Ennélfogva

pályája az oválison belül esik és azt soha el nem hagyhatja, mozgása stabilis.

A 3. rajz megfelel amaz esetnek, mikor $(2c)^{\frac{2}{3}} = 9\mu n'$. Itt is két oly részre oszlik a sík, melyeknek egyike zárt és a melyen belül a mozgás stabilis, másika pedig csak egyoldalúlag határolt s ebben a mozgás instabilis. A két rész egy pontban érintkezik s azt lehetne gondolni, hogy az égitest, mely az oválison belül van, e pontokon át a sík instabilis részeibe juthat. E pontok azonban nem egyebek, mint a (9) egyenletek LAGRANGE-féle egyenesvonalú megoldásai, a melyekben a relativ sebesség = zérussal. Az oválison belül az égitest e pontok felé csak aszimptotikusan közeledhetik s az oválist el nem hagyhatja. E pontok távolsága a Földtől $= \pm 235 \cdot 5971$ fűldsugár. Ha igen kicsiny égitest, pl. meteor e pontok közelébe jut, úgy ezek közül vagy instabilis ellipszist ír le, vagy aszimptotikusan közeledik feléjük, vagy stabilis pályát ír le körülöttük a kezdőfeltételek természete szerint.

A LAGRANGE-féle megoldás ugyanis itt

$$y=0, \quad x = \pm \sqrt[3]{\frac{2c}{3n'}} = \pm \sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}} = a.$$

E megoldás közelében legyen

$$\begin{aligned} x &= a + \delta x, \\ y &= 0 + \delta y, \end{aligned}$$

hol δx , δy igen kicsinyek, úgy hogy második és felsőbb hatványaik elhanyagolhatók. Behelyettesítve a (9) mozgásegyenletekbe, lesz:

$$\begin{aligned} \delta x'' - 2n'\delta y' + \frac{\mu(a + \delta x)}{[(a + \delta x)^2 + \delta y^2]^{\frac{3}{2}}} - 3n'^2(\mu + \delta x) &= 0, \\ \delta y'' + 2n'\delta x' + \frac{\mu\delta y}{[(a + \delta x)^2 + \delta y^2]^{\frac{3}{2}}} &= 0. \end{aligned}$$

TAYLOR-sorba fejtvé s az említett elhanyagolásokat eszközölve, találjuk, hogy

$$\delta''x - 2n'\delta y' - 9n'^2\delta x = 0.$$

$$\delta y'' + 2n'\delta x' + 3n'^2\delta y = 0.$$

Legyen $\lambda = +n'\sqrt{1+2\sqrt{7}}$, $\sigma = +n'\sqrt{2\sqrt{7}-1}$, akkor ezen egyenletek teljes integrálja:

$$\delta x = A_1 e^{+\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t} + A_3 e^{+\sqrt{-1}\sigma t} + A_4 e^{-\sqrt{-1}\sigma t},$$

$$\delta y = B_1 e^{+\lambda t} + B_2 e^{-\lambda t} + B_3 e^{+\sqrt{-1}\sigma t} + B_4 e^{-\sqrt{-1}\sigma t}.$$

A szerint a mint az összes A -k és B -k különbözők zérustól, vagy csak $A_1=B_1=0$, vagy $A_1=B_1=A_2=B_2=0$ előállanak az említett instabilis, aszimptotikus vagy stabilis pályák.

Ezek a megoldások annyiban érdekesek, hogy magyarázatát adják egy tűneménynek, az ú. n. ellenfénynek, melyet BRORSEN észlelt először 1855-ben s utána többen mások, így BACKHOUSE (1868), BARNARD (1875). Az ellenfény mindig az égne a Napal ellenkező pontján látszik s követi a Nap mozgását. Az a számtalan meteor, a mely a Naprendszeren belül rajzik, ha a LAGRANGE-féle pont közelébe érnek, ott több-kevesebb ideig oly pályákat kénytelenek leírni, a minőket fennebb találtunk. Az ellenfény eszerint ily rajzó meteorok visszavert fénye. Az ellenfénynek ezt a magyarázatát először GYLDÉN kísérelte meg.¹ A periodikus pályák tulajdonképpen quadratura nélküli holdak pályái.²

A 4. rajz esetében, mikor $(2c)^{\frac{2}{3}} < 9\mu n'$ a mozgás instabilis.

A (9) egyenletek nem változnak, ha y és t előjelét megváltoztatjuk, x -ét változatlanul hagyjuk, vagy ha x és t előjelét változtatjuk meg és y -ét hagyjuk változatlanul. Ebből következik, hogy ezen egyenletrendszernek oly megoldást kell megengednie, mely szimmetrikus úgy az x mint az y tengelyre nézve. Ha tehát a Hold az x -tengelyt derékszög alatt hagyja el, az y tengelyt derékszög alatt éri és így tovább, akkor ismét

¹ Bullet. Astron. Vol. I. Sur un cas particulier du problème des trois corps. Lásd Még MOULLON: Astron. Journal. Nr. 483.

² POINCARÉ: Méth. nouv. I. 160. l.

visszajön a kiindulás helyére, pályája szimmetrikus és a periodus nyilvánvalóan egy szinodikus hónap, vagyis $= \frac{2\pi}{n-n'}$. Ennél fogva kell hogy legyen, ha $\nu = n - n'$,

$$\begin{aligned} x &= A_0 \cos \nu(t-t_0) + A_1 \cos 3\nu(t-t_0) + A_2 \cos 5\nu(t-t_0) + \dots \\ y &= B_0 \sin \nu(t-t_0) + B_1 \sin 3\nu(t-t_0) + B_2 \sin 5\nu(t-t_0) + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

a mivel a (9) egyenletrendszernek egy új, periodikus megoldását találtuk. A Hold a $t=t_0$ időben az x tengelyen van. Könnyű belátni, hogy az argumentumnak csak páratlan sokszorosai fordulhatnak elő, nem periodikus tagok és az argumentum páros sokszorosai pedig nem. Ugyanis a periodus $= \frac{2\pi}{n-n'} = \frac{2\pi}{\nu}$, a negyedperiodus tehát $= \frac{\pi}{\nu}$. Mikor a Hold az x tengelyen van, $y=0$; egy negyed periodus múlva pedig a Hold az y tengelyen van és akkor $x=0$. Ha az argumentum páros sokszorosai is előfordulnának a sin és cos alatt, úgy $\frac{1}{4}$ periodus múlva sin és cos is fordulna elő pl. x -ben és x nem lehetne = zérus.

Fontos megjegyeznünk, hogy a (11) a (9) egyenletrendszernek partikuláris megoldása. A (9) teljes integráljának ugyanis négy tetszőleges konstánst kell tartalmaznia. Ezek közül egyet, a JACOBI-féle állandót $= C$, már ismerjük. A második nyilvánvalóan a Hold-pálya excentricitása $= e$, a hátralevő kettő pedig ν és t_0 . Az általános integrálban lesznek oly tagok, melyek csak a Nap középmozgásától, n' -től származnak és lesznek olyanok is, melyek ezenkívül e -től és a perigeum mozgásától függenek.

HILL alapeszméje éppen az, hogy ezt a pályát keresse először, mely csupán n' -től függ, e -től pedig független. A (11) tehát szükségképpen oly partikuláris megoldás, mely csak két tetszőleges állandót tartalmaz, e -től, a Hold-pálya excentricitásától pedig teljesen független. Jelentik tehát ama görbe paraméteres egyenleteit, mely a Hold köralakú pályájának deformációjából áll elő a csupán n' -től függő perturbáló erő hatása alatt $\frac{2\pi}{n-n'}$ periodus alatt. Más szóval jelentik a BRAHE-féle variációt. Természetes, hogy a (11) alakban a periodus nem a fél szino-

dikus keringés, mint a tangenciális komponensnél; x és y a teljes szinodikus hónap alatt veszik föl minden lehetséges értéküket. Ha azonban x és y -ből előállítjuk a Hold radius vectorát és hosszúságát, úgy az utóbbi periodusa csakugyan a fél szinodikus hónap.

Hátra van még az A_i és B_i koefficiensek meghatározása. A (11)-ből x és y értékeit be kellene helyettesíteni a (9) mozgásegyenletekbe s az egyenlő argumentumokkal bíró kifejezések koefficienseit zérussal kellene egyenlővé tenni. A (9) egyenletek nem lineáris alakja könnyen meggyőz, hogy ily módon az A_i és B_i -k meghatározása leküzdhetetlen nehézségekbe ütközik, különösen az $(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ kifejezés előfordulása miatt. Ezek elkerülése céljából végezzük a következő transzformációkat:

$$\begin{aligned} A_i &= a_i + a_{-i-1}, \\ B_i &= a_i - a_{-i-1}, \\ m &= \frac{n'}{n-n'} = \frac{n'}{\nu}, \\ x &= \frac{\mu}{\nu^{\frac{3}{2}}}, \\ \nu(t-t_0) &= \tau, \\ \bar{u} &= x + \sqrt{-1}y, \\ s &= x - \sqrt{-1}y, \\ \zeta &= e^{\sqrt{-1}\tau}; \end{aligned}$$

jelentse még a D operátor: $D(\) = \zeta \frac{d(\)}{d\zeta} = -\sqrt{-1} \frac{d(\)}{d\tau}$, akkor (9)-ből lesz

$$\begin{aligned} D^2u + 2mDu + \frac{3}{2}m^2(u+s) - \frac{xu}{(us)^{\frac{3}{2}}} &= 0, \\ D^2s - 2mDs + \frac{3}{2}m^2(u+s) - \frac{xs}{(us)^{\frac{3}{2}}} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

és a JACOBI-féle integrál

$$DuDs + \frac{2x}{\sqrt{us}} + \frac{3}{4}m^2(u+s)^2 = C, \quad (13)$$

továbbá a (11)-ből

$$\begin{aligned} u &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i \zeta^{2i+1}, \\ s &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{-i-1} \zeta^{2i+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

A (13) segítségével a (12)-ből kiküszöböljük a nehézségeket okozó $(us)^{-\frac{3}{2}}$ -öt. Szorozzuk a (12) egyenletek elsejét s -szel, másodikat u -val, vonjuk ki egymásból; adjuk össze és csatoljuk hozzá (13)-at, lesz:

$$\begin{aligned} D^2(us) - Du \cdot Ds - 2m(uDs - sDu) + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 &= C, \\ D(uDs - sDu - 2mus) + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Ezekből az egyenletekből hiányzik a probléma lényeges konstansa μ vagy κ s azonfelül egy fölösleges konstans vezetődött be. Ez eliminálódik, ha a talált integrálokat az egyik eredeti egyenletbe helyettesítjük, a mi által egy feltételi egyenlethez jutunk, mely a fölösleges konstanszt az μ és a többi konstansok segítségével engedi kifejezni.

Helyettesítsük a (14) partikuláris integrálokat a (15)-be, végezzük el a kijelölt operációkat és tegyük egyenlővé zérussal a ζ ugyanazon hatványaihoz tartozó koefficienseket. A következő két relációt fogjuk találni:

$$\begin{aligned} \sum_i [(2i+1)(2i-2j+1) + 4j^2 + 4m(2i-j+1) + \frac{9}{2}m^2] a_i a_{i-j} + \\ + \frac{9}{4}m^2 \sum_i a_i (a_{-i+j-1} + a_{-i-j-1}) &= 0, \\ 4j \sum_i [2i-j+1 + m] a_i a_{i-j} - \frac{3}{2}m^2 \sum_i a_i (a_{-i+j-1} - a_{-i-j-1}) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

melyek j minden pozitív és negatív értékére érvényesek, zérust kivéve, a mikor az első reláció jobb oldalán a 0 helyébe C -t kell tenni.

Jelentse

$$\begin{aligned} [j, i] &\equiv -\frac{i}{j} \frac{4(j-1)i + 4j^2 + 4j - 2 - 4(i-j+1)m + m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2}, \\ [j] &\equiv -\frac{3m^2}{16j^2} \frac{4j^2 - 8j - 2 - 4(j+2)m - 9m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2}, \\ (j) &\equiv -\frac{3m^2}{16j^2} \frac{20j^2 - 16j + 2 - 4(5j-2)m + 9m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2}, \end{aligned}$$

akkor a (16) helyett a következő egyetlen relációt állíthatjuk fel:

$$\sum_i \{ [j, i] a_i a_{i-j} + [j] a_i a_{-i+j-1} + (j) a_i a_{-i-j-1} \} = 0. \quad (17)$$

Ez bidimenzionális egyenletrendszer végtelen sok ismeretlennel. De nem szabad elfelejtenünk, hogy az egyenletek száma mégis eggyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma (mert $j=0$ ki van zárva), s így általában az $\frac{a_n}{a_0}$ értékeket kapjuk.

A megoldás folytonos közelítéssel eszközölhető s célja az a_i -k számára konvergens sorok előállítás. Egy szempillantás a (17)-re meggyőzhet bennünket arról, hogy az a_i -k között semmiféle véges reláció sem állhat fenn, annál kevésbé az A_i és B_i -k között. Épp az, hogy HILL a (11) partikuláris integrált választotta intermediáris pályának, mutatja, hogy mily mélyen látta át a probléma nehézségeit. Hogy az általános integrál még nagyobb komplikációkat involvált volna, az természetes, mert a perigeum mozgását is meg kellett volna adnia.

Első közelítésben írhatjuk:

$$\begin{aligned} a_0 a_1 &= [1] a_0 a_0, \\ a_0 a_{-1} &= (-1) a_0 a_0, \\ a_0 a_2 &= [2] (a_0 a_1 + a_1 a_0) + [2, 1] a_1 a_{-1}, \\ a_0 a_{-2} &= (-2) (a_0 a_1 + a_1 a_0) + [-2, -1] a_1 a_{-1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ezekkel a közelítésekkel újabb közelítést érünk el a (17)

segítségével. Végeredményben azt fogjuk találni, hogy $\frac{a_i}{a_0}$ ilyen alakú:

$$\frac{a_i}{a_0} = \sum_{q,j} \frac{Am^k + Bm^{k+1}}{(8j^2 - 2 - 4m + m^2)^q},$$

hol a nevező m semmiféle reális értékére sem lehet $= 0$, azaz nincs reális pólusa, a miben különbözik a kis divizoroktól, melyek közönséges szukczzessziv approximácziónál a (perturbáló erő hatványai szerint) mindig fellépnek.

Az a_i -k mint m függvényei vannak ekként előállítva. Az m értékét pedig a megfigyelésekből nagy pontossággal ismerjük.

Ugyanis $m = \frac{n'}{n-n'}$; de $n' = \frac{2\pi}{T_1}$, hol T_1 a sziderikus napév tartama, $\frac{2\pi}{n-n'} = S$ pedig a Hold szinodikus keringés-ideje, melyet a napfogyatkozásokból és a köztük eltelt lunácziók számából lehet pontosan megállapítani.

Az a_0 értékét úgy nyerjük, ha (14)-et behelyettesítjük a (12) első egyenletébe, C értékét pedig a (17)-ből nyerjük, ha teszünk: $j = 0$,

$$C = \frac{1}{2}(\mu n)^{\frac{3}{2}} \left[1 + 2m - \frac{5}{6}m^2 - m^3 - \frac{1319}{288}m^4 - \frac{67}{144}m^5 - \frac{2879}{1296}m^6 - \frac{1321}{1296}m^7 + \dots \right].$$

Végül a következő numerikus értékeket találjuk: a megfigyelés szerint

$$n = 17325594.06085'',$$

$$n' = 1295977.41516'',$$

ennélfogva

$$m = \frac{n'}{n-n'} = 0.080848933808312;$$

$$C = 111.18883,$$

A 15-tizedesnyi pontosság nem túlhajtott s az égi mecha-

nikában eddig szokásos sorkifejtésekkel szemben illusztrálja, hogy miképpen lehet itt gyorsan konvergens sorokhoz jutni. Ez különösen akkor válik szembetűnővé, ha HILL sorkifejtéseit összehasonlítjuk azokkal, melyekhez DELAUNAY jutott híres Hold elméletében.¹ HILL csekély fáradsággal talál 15 tizedesre feltétlenül pontos értéket ott, hol DELAUNAY 497 rendkívül fáradságos operáció után csak 5 tizedest tud pontosan megállapítani.

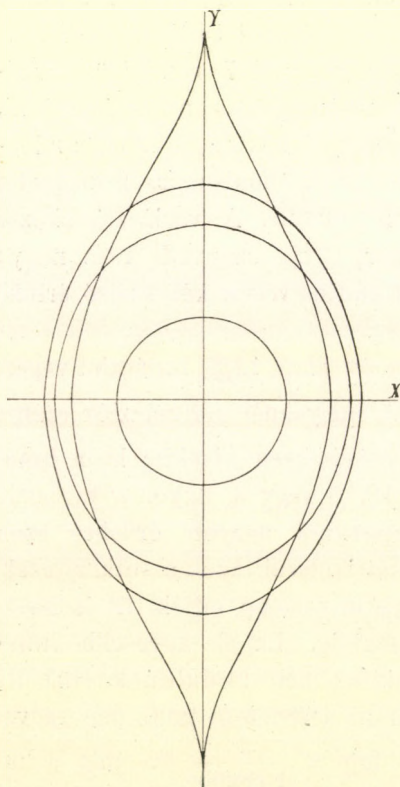
A (18) szerint a variáció legnagyobb értéke $0^{\circ}35'6''$; r legkisebb értéke (a syzygiumokban) $59\cdot835$ fűldsugár, legnagyobb értéke pedig (a quadraturákban) $60\cdot698$. A variáció okozta deformáció, melyet a Hold körpályája szenved, nem nagy; csak $0\cdot863$ fűldsugarat tesz ki a radius vector két szélső értéke közötti különbség.

A mi Holdunk egy sziderikus év alatt $12\frac{59}{160}$ lunációt végez, azaz $\frac{1}{m} = 12\frac{59}{160}$. Oly holdaknál, melyeknél a lunációk száma ennél nagyobb, a variáció természetesen kisebb; ha a lunációk száma kisebb, pl. csak 10, 5 vagy 3, akkor a variáció növekedni fog. Elméleti szempontból nagyon érdekes ezen holdak variációjának viselkedését ismerni. Azok a sorkifejtések, melyek az a_i -k értékeit m függvényeiképp adják, itt is használhatók egészen három lunációig. Ennél kevesebb lunációnál mechanikus quadraturákhoz kell fordulnunk. HILL ily úton a lunációk legkisebb számául $1\cdot78265$ -öt talál, más szóval e Hold színodikus keringési ideje $= \frac{1}{1\cdot78265}$ év, míg a mi Holdunké $\frac{1}{12\frac{59}{160}}$. HILL ezt a Holdat a legnagyobb lunációval bíró Holdnak nevezi; a variáció ennél $47^{\circ}23'12''$ -re emelkedik; a Fűldtől való távolság legkisebb értéke (syzygiumokkor) $92\cdot352$ fűldsugár, legnagyobb értéke $265\cdot67$. Míg a többi holdaknál a variacionális görbe némileg hasonlít az ellipszishoz, e hold variacionális görbéje az y tengelyen elsőfajú csűcsban végződik.

¹ DELAUNAY: Théorie de la Lune. Mém. de l'Acad. des Sciences, 28. és 29. kötet (1860. és 1867.).

Az 5. rajz feltünteti néhány hold variacionális görbéjét.

A belső kör a mi Holdunké; a rajz dimenzióiban a körtől való eltérést nem lehetett feltüntetni. A kisebbik ovális oly



5. rajz.

hold görbéje, mely a Föld körül 4 szinodikus keringést végezne egy év alatt. A nagyobbik ovális a 3 lunációs holdé, míg a csúcsokban végződő a maximum-lunációval bíró holdé.

ADAMS és utána POINCARÉ¹ azonban kimutatták, hogy lehetségesek oly holdak, melyeknek keringésideje még $\frac{1}{1.78265}$ -nél is nagyobb, úgy hogy a HILL-től talált holdat nem illeti meg a maximum-lunáció elnevezés. Ezek a holdak a quadraturák környékén hurokszerű pályában mozognak és az y tengelyt egy, három vagy több páratlan számú kettőspontban metszik, úgy hogy 3, 5, 7-szer egymásután jönnek quadraturába. Ily hurkok képződhetnek az x tengelyen is.

Csak hogy meg kell jegyeznünk, hogy a szinodikus periodus növekedésével a JACOBI-féle konstáns fogy. Tegyük $\mu = n' = 1$,

akkor $m = \frac{1}{n-1}$ és

$$2c = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}} [1 + 2m - \frac{5}{6}m^2 - m^3 - \dots].$$

¹ Méthodes nouv. I. 108. l.

A mi Holdunknál $\frac{1}{m} = 12\frac{59}{160}$ és $2c = 6\cdot50388$, a maximum-lunációval bíró Holdnál $\frac{1}{m} = 1\cdot78265$ és $2c = 2\cdot55788$. De láttuk, hogy a mozgás stabilitása a JACOBI-féle konstáns értékétől függ. A 2., 3., 4. rajzoknál mondottak szerint a mozgás csak addig stabilis, míg $2c \geq \sqrt[3]{81}$, c kisebb értékeinél nincs ovális, mely a Holdpályát körülzárja s a radiusvector felső határát megszabja, s ekkor előáll a 4. rajz esete. Mindazok a Holdak, a melyeknél $2c < 4\cdot3267$, ennél fogva instabilisak, a mi előáll, mikor az évi lunációk száma $4\frac{1}{2}$ -nél kisebb. Az 5. rajzban feltüntetett variacionális görbék tehát — a Föld Holdjáét kivéve — instabilisak. A stabilis pályák teljesen a négy-lunációs Hold pályáján belül fekszenek.

Miután a Hold variacionális görbéjét megtaláltuk, kereshetjük azokat a deformációkat, a melyeket a Hold excentricitása, a Nap véges távolsága s i. t. idéznek elő. A variacionális görbét azért intermediáris pályának nevezhetjük. Hogy a KEPLER-féle ellipszis erre nem alkalmas, azt már említettük. Ugyanis az ellipszis a két test problémájának megoldása lévén, benne a perigeum mozdulatlan, más szóval a nagy tengely állandóan ugyanabba az irányba mutat. Harmadik test jelenlétekor ez többé nem lehetséges, a perigeumnak el kell mozdulnia. A (9) egyenletekben a Nap minden perturbáló hatása el van hanyagolva, egyet kivéve, a mely a Nap középmozgásától származik. Ezen egyenletekből tehát ki kell adódnia a Hold-perigeum-mozgás ama részének, a mely n' -től függ és mivel az excentricitás mint integrációs állandó lép fel, a variáció és a perigeum-mozgás ama részeinek is, a melyek az excentricitástól és n' -től együttesen függenek.

A perigeum mozgásának vizsgálata alkalmával merült fel először konkrét alakban a végtelen determináns, mely azóta számos vizsgálatnak szolgált alapul.

Wodetzky József.

A LANTHÁN ÉS A KOBALT SPEKTRÁLVONALAINAK ZEEMAN EFFEKTUSÁRÓL.

(Első közlemény.)

Történeti áttekintés. Lorentz elmélete.

Ama kutatások legelső nyomait, a melyek a mágneses erőternek a fényemissióra való befolyására vonatkoztak, FARADAY-nál (1862) találjuk meg. Kísérlete a várt eredményre nem vezetett, bár szerencsés lángelméje már sejtette ama nagyszerű eredményeket, a melyeket csak az újabb kor finom spektroszkópiai eszközei tudtak felderíteni.

Csak jóval később sikerült ZEEMANNnak¹ (1896), W. THOMSON (LORD KELVIN) egy hypothésisétől vezettetve a FARADAY-féle kísérletek nyomán ama nagyfontosságú észleléseit végeznie, a melylyel a nevére elnevezett magnetooptikai jelenséget felismerte s ezzel új kutatások alapját megvetette.

THOMSON ugyanis a magnetooptikai jelenségek (mint a FARADAY-, KEER-effektusok) magyarázatára azon hypothésist vezette be, hogy a mágneses erőter egy átlátszó test molekuláiban az ætherrészecskéket az erővonalak körüli forgásba ú. n. molekuláris rotációba hozza; e forgás az erőterben tovahaladó czirkuláris fényrezgésre befolyással van: annak frequentiáját növeli, illetve kisebbíti a szerint, a mint a czirkuláris fényrezgésben az ætherrészecskék mozgásának iránya e molekuláris rotáció irányával megegyezik, avagy azzal ellentett.²

¹ Verslagen en Mededeelingen d. Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam 5. 1896.

Philosophical Magazine and Journal of Science 5. 43. 1897.

² E hypothésis segítségével például a FARADAY-féle jelenség könnyen magyarázható.

Ugyanis a mágneses erővonalakkal parallel haladó síkban polározott fény mindenkor két ellentett körösen polározott fényre bontható. A mág-

E hyphothézés alapján most már várható, hogy egy fényforrás által kibocsátott fény természetében változásnak kell előállania, ha a fényforrás mágneses erőterben van jelen. A fényforrásban végbemenő mindenkor *homogén* rezgés ugyanis mindig két: egy a mágneses erővonalakkal parallel és egy erre merőleges irányú rezgésből tehető össze; az utóbbi rezgés pedig két ellentetten czirkuláris rezgés eredőjének tekinthető. Tehát a fényforrás minden egyszínű rezgése *három* összetevőre: egy az erővonalakkal parallel végbemenő vonalmenti és két az erővonalak körül történő ellentetten czirkuláris rezgésre bontható. A két czirkuláris rezgés frequentiájának a mágneses erőter jelenlétele folytán azonban a fenti hypothézés értelmében növekednie, illetve kisebbednie kell, a minek folytán várható, hogy az emittált fény spektruma a mágneses erőter gerjesztésével változást fog szenvedni.

ZEEMAN e gondolatától vezettetve egy erős elektromágnes pólusai közé helyezett nátriummal megfestett Bunsen-láng által kibocsátott, illetve az általa elnyelt fény spektrumát ily szempontból vizsgálta. Hosszas kísérletek után (1893—1896) a *D* vonalnak megszélesedését tapasztalta mindaz esetben, valahányszor az elektromágneses erőter gerjesztve volt, még pedig úgy a direkt, mint pedig az invers, absorptió szinképben.

Magából e tapasztalati tényből azonban — bár a kísérleti

neses erőter a THOMSON-féle hypothézés értelmében az erőterben levő ponderikus testben e két czirkuláris fényrezgés egyikének frequentiáját növeli, másikát ellenben kisebbíti úgy, hogy a két fény e közegben egymástól különböző ω_+ és ω_- sebességgel terjed tova. E czirkuláris kettős törésnek az eredménye, hogy bár a testből kilépő fény ismét síkban polározott, de polározási síkja a beesőéhez képest

$$\chi = \frac{1}{2} \nu l \left(\frac{1}{\omega_-} - \frac{1}{\omega_+} \right) \quad (a)$$

szöggel elforgatva van. ν jelenti a fény frequentiáját, l pedig a fény a ponderikus testben megtett útjának a hosszát. (A FARADAY-féle jelenség részletesebb ismertetését MKOLA SÁNDORNAK a Matematikai és Physikai Lapok 9. 1900. kötetében közölt «Az elektromágneses tér hatása a fényre» című dolgozata tartalmazza.)

tényezők nagyszámú változtatásával valószínűnek látszott — teljes szigorúsággal megállapítható nem volt, hogy a D vonalnak e megszélesbebedése tényleg egy magnetooptikai jelenség és nem valamely secundär hatásnak az eredménye.

A kérdés eldöntésére számos elméleti physikus, különösen LORENTZ¹ elméleti megfontolásai vezettek. A jelenség LORENTZ-től származó elméleti, az akkor még csak keletkezőben lévő elektronelmélettel való magyarázata kijelölte a kísérleti továbbhaladás útját, mely azután a kérdés eldöntését és ezzel viszont a jelenség az elektronelmélet egy hatalmas támaszát nyújtotta.

A fényjelenséget az elektronelmélet szerint a fényforrásban rezgő *elektronok* okozzák. Egy ily elektron rezgése az elmélet szerint oly erőnek hatása folytán megy végbe, mely az elektron nyugalmi helyzete felé van irányítva, nagysága pedig a mozgó elektron mindenkori helyzetének a nyugalmi helytől való távolságával arányos. Tehát az elektronokra ható ezen erő ép oly karakterű, mint azon elastikus erő, mely valamely tömegpontot harmonikus rezgőmozgásra kényszerít. Ép ez okból ez erőt *quasielastikus erőnek* is szokás nevezni.

De lássuk most már azt, hogy a fény gerjesztése ily elektron-rezgéssel miként magyarázható?

Elméleti megfontolásokból következik, hogy egy ily elektron-rezgés ép úgy, miként a HERTZ-féle oscillátor, a mi kísérletileg igazolható, elektromágneses hullámokat kelt a térben, mely elegendő nagy frequentiánál mint *fény* vehető észre. Ez elektromágneses zavar a rezgés helyéről egy *homogen* és *isotrop* dielektrikumban gömbhullámokban terjed tova, melyben, ha a rezgés egyenesvonalú az elektromos erő meridionalis, a mágneses erő pedig czirkumaxialis rendszert képez. Az elektromos erő irányát és nagyságát a tér bármely helyén e rezgésnek a gömbre való vetülete adja. Ez érvényes az esetben, ha az elektron egyenesvonalú oscillációt végez.

¹ A. LORENTZ: Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen ... Leiden 1895.

Ha azonban a rezgés ellipszis alakú pályán megy végbe, akkor, mivel e rezgés mindig két egymásra merőleges vonalmenti rezgésre bontható, az elektromos erő ismét az elektron pályája mindenkor vezérsugarának az észlelő helyhez érkező gömbhullámra való vetülete.¹ Tehát az ide érkező *fény polározási állapotát az elektron rezgése pályájának e vetülete határozza meg.*

Miután ily módon az elektronrezgés pályájának ismeretével a fényforrásból kiinduló fény polározási állapota a tér minden helyén megállapítható, reátérek a ZEEMAN-féle jelenség LORENTZ-féle elméletének rövid ismertetésére a nélkül, hogy a részletes tárgyalásokba mélyebben behatolnánk.²

Az elektronhypothesisből következik, hogy a quasielastikus erőnek alávetett e elektromos töltésű és m ponderikus tömegű elektronnak rezgése H mágneses erőter behatása folytán három rezgésre bomlik, a melyek egyike változatlan periodussal az erővonalakkal parallel megy végbe, a másik két rezgés ellenben az erővonalak körül egymással ellentetben czirkulárisan történik. Az utóbbi rezgések frequentiája azonban az eredeti rezgés frequentijától

$$\mu_0 = -2\pi c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \pm \frac{eH}{2mc} \quad (1)$$

értékkel különbözik; még pedig *positív* töltés ($+e$) esetén ama rezgés frequentiája *kisebb*, melynél a $+H$ irány körüli forgás a *positív* elektromos áramok irányával egyezik. Ha pedig a rezgő elektronnak negatív töltése van, akkor fordítva érvényes.³

¹ Lásd M. ABRAHAM: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. 1908. 62. oldalán.

² Ez elméletet MIKOLA SÁNDOR idézett dolgozatában részletesen ismerteti.

³ Ez eredmény az elektron mozgásegyenleteiből adódik. A mozgásegyenlet felállításához az elektronra ható erők ismerete szükséges. Az elektron rezgését a feltétel értelmében egy quasielastikus erő hatása folytán végzi. Ez erőnek derékszögű összetevői $-kx$, $-ky$, $-kz$ alakban írhatók, a hol k pozitív állandót jelent. Ha az elektron rezgése mágneses erőterben történik, akkor ez erőhöz még egy másik, az elektron sebessége

E három rezgés mindenike elektromágneses hullámok gerjesztő czentruma.

Ezek szerint a mágneses erőtér az elektronrezgést akként befolyásolja, hogy a tér minden irányában minden eredeti hullám helyett három hullám terjed tova. E hullámok frekvenciája, tehát hullámhossza egymástól különbözik. Ismervén a három rezgést, a tér minden helyén minden időpillanatban meghatározhatjuk az elektromos erő irányát és nagyságát, azaz az elektronelmélet értelmében az elektromágneses zavar által keltett fény *polározási* állapotát.

A végtelen sok eset közül szemeljük ki azokat, melyeknél az észlelés az erővonalakkal parallel, illetve erre merőleges irányban történik.

1. A mágneses erővonalakkal parallel e három hullámok egyike longitudinális lévén fényhatást nem kelthet, a másik két ellentetten czirkuláris rezgés fenti vetülete pedig kör; az elektromos erő végpontja ezek egyikén jobbra, másikán pedig balra végzi mozgását.

2. Az erővonalakra merőleges irányban tovahaladó három hullám mindenike síkban polározott. Az elektromos erő oscilációja ezek egyikében az erővonalakkal parallel, a másik két

és az erőtér nagysága által meghatározott erő járul, melynek komponensei ha az erőtérnek iránya a positiv z tengely irányával megegyezik $+\frac{eH}{c}y'$, $-\frac{eH}{c}x'$, 0, a hol c a fény terjedési sebességét, x' és y' az x , illetve y -nak az időszerinti differentiaalquotiensét, azaz az elektronnak x és y -menti sebességi komponensét jelenti. Tehát a mozgásegyenletek a következők:

$$mx'' = -kx + \frac{eH}{c}y',$$

$$my'' = -ky - \frac{eH}{c}x',$$

$$mz'' = -kz.$$

A harmadik egyenlet mutatja, hogy a z tengelymenti rezgés változatlan, tehát frekvenciája $\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ugyanaz marad. A két első egyenlet azonban a rezgés x és y -menti összetevőinek megváltozott frekvenciájára vezet. (V. ö. Math. és Phys. Lapok 9. 1900. 88. oldal.)

hullámnál pedig, melyek a czirkuláris rezgésekből származnak, az erővonalakra merőleges irányban mennek végbe.

Ha tehát az elektronelmélet talajára állunk és felveszszük, hogy egy homogén fény, egy spektrálvonal a fényforrásban végbemenő quasierlastikus erő létesítette elektronrezgésnek az eredménye, akkor az itt mondottak alapján következik, hogy e spektrálvonalnak a mágneses erőtér gerjesztésével a következő változásokat kell mutatnia:

Az erővonalakkal parallel irányban *két ellentetben körösen polározott* vonalra kell bomlania, melyek egyike rezgésszámának nagyobb, másikának pedig ugyanannyival kisebbnek kell lennie az eredeti spektrálvonal rezgésszámánál.

Az erővonalakra merőleges irányban az egy spektrálvonal helyett *három* vonalnak kell előállania, a melyek egyike a mágneses erőtérre *merőleges síkban* polározott s rezgésszáma a tulajdonképeni vonal rezgésszámával azonos, a másik két — szélső — vonal polározási síkja ellenben az erővonalakkal *parallel*, rezgésszáma pedig az előbbi dublet egy-egy komponensének rezgésszámával külön-külön egyenlő.

Tehát, ha a fényt egy spektroskóppal vizsgáljuk, akkor az erővonalak irányában egy dubletet erre merőleges irányban pedig egy tripletet alkotó vonalesoportot kell észrevennünk, melyek a fenti polározást mutatják.

A mi pedig e vonalak (*komponensek*) erősségét, intenzitását illeti, arra nézve egy kis elméleti megfontolásból az következik, hogy a dubletet alkotó két vonalnak egyenlő erősségűnek, a tripletben azonban a középső komponensnek a szélsőknél kétszer intenzívebbnek kell lennie. A fényforrásban lévő molekulák mozgásának teljes rendnélküliségéből ugyanis a legnagyobb valószínűséggel arra lehet következtetni, hogy a fényforrásból minden irányban egyenlő energiamennyiség terjed tova, s így a mágneses erővonalakra merőleges síkban polározott hullámban tovaterjedő energiának kétszer akkorának kell lennie azon energiánál, mely egy-egy czirkulárisan polározott hullámban tovaterjed.

Az itt mondott elméletileg nyert eredményeket vessük össze ZEEMAN kísérleti megfigyelésével. Látni való, hogy az a tapasztalat, mely szerint a spektrálvonalak a mágneses erőter gerjesztésével megszélesebbednek az elméletnek megfelel, mert lehet, hogy csupán az erőternek és a spektroszkóp felbontó képességének kicsiny volta volt oka annak, hogy a vonalak teljes szétbomlása észrevehető nem volt. Ép ezért a figyelem elsősorban is a megszélesebbedett vonal különböző részei polározásbeli állapotának kiderítésére irányult. Az e célból végzett megfigyelések az elméletnek teljesen megfelelő eredményhez vezettek:

Az erővonalakkal parallel irányban a spektrálvonalak szélei ellentetten körös polározást mutattak; az erővonalakra merőlegesen a vonalak szélei az erővonalakkal parallel síkban, a középső részei pedig erre merőleges síkban polározottnak adódtak.

Az elmélet és a kísérleti tapasztalat tehát *teljes* összhangzásba került.

A kísérleti továbbhaladás útját az elmélet jelölte ki. Ezek után természetes, hogy a törekvés most már oda irányult, hogy az elektromágneses erőter intenzitásának, továbbá az optikai segédeszközök felbontó képességének fokozásával a spektrálvonalak összetevői egymástól teljesen szétválaszthatók legyenek.

És csakugyan sikerült is ZEEMANNak 1897-ben az elektromágnes és az optikai segédeszközök tökéletesítésével egy alkalmasan választott spektrálvonallal, a *kadmium* kékeszöld vonalával úgy a *longitudinalis dubletet*, mint pedig a *transversalis tripletet* teljességében először észlelnie, még pedig úgy a direkt, mint pedig az absorptió színekben.¹

A ZEEMAN-féle jelenség lényege ezek szerint abban áll, hogy *ha valamely test a mágneses erőter behatása nélkül ν_0 rezgésszámú (homogén) fényt kibocsát, akkor ugyanaz a test a mág-*

¹ P. ZEEMAN: Doublets and triplets in the spectrum produced by external magnetic forces. Philos. Magazine (5). 44. 1897.

neses erőterben 1. az erővonalakkal *parallel irányban* $\nu_0 - \mu_0$ és $\nu_0 + \mu_0$ frequentiájú *ellentetlen* *czirkulárisan* *polározott fényt*, 2. az erővonalakra *merőlegesen* *pedig* *háromszínű* $\nu_0 - \mu_0$, ν_0 , $\nu_0 + \mu_0$ *rezgésszámú fényt* *emittál*.

De az emissió és az absorptió között ismert reciprocitás, miként már említettük, a ZEEMAN-féle jelenségnél is feltalálható.

A kísérleti tapasztalat igazolja, hogy *ha valamely test a mágneses erő behatása nélkül a rajta keresztül haladó fehér fényből a ν_0 rezgésszámú fényt elnyeli, akkor ugyanez a test a mágneses erőterben 1. az erővonalakkal parallel irányban $\nu_0 - \mu_0$ és $\nu_0 + \mu_0$ rezgésszámú, 2. az erővonalakra merőlegesen pedig $\nu_0 - \mu_0$, ν_0 , $\nu_0 + \mu_0$ frequentiájú fényt elnyel*.

E szabályokban összefoglalt jelenség az, a melyet ZEEMAN-féle *jelenségnek*, *effektusnak* nevezünk. Az első a *direkt*, az utóbbi az *invers* effektus. Az erővonalakkal parallel történő megfigyelésnél észlelt jelenséget, az erre merőleges irányban észlelt jelenségtől való megkülönböztetés céljából külön névvel szokás nevezni; az előbbi a *longitudinális*, az utóbbi a *transversalis* effektus.

A ZEEMAN-féle jelenség alkalmas arra, hogy segélyével a fényforrásban rezgő elektronok adatait meghatározzuk.

Említettük ugyanis, hogy az elektronelmélet szerint egy elektron rezgése a mágneses erőter hatása folytán akként módosul, hogy megváltozott rezgése három különböző frequentiájú rezgésből összetettnek tekinthető. Ezek egyikének frequentiája az eredeti rezgés frequentiájával azonos, a másik két ellentetlen körös rezgés frequentiája az eredeti rezgés rezgésszámától μ_0 (1) értékkel különbözik, a hol pozitív elektromos töltés esetén a negatív, negatív töltés esetén pedig a pozitív előjel ama rezgésre érvényes, a melynél a $+H$ körüli rezgés pozitív irányú.

A szerint tehát, a mint a $+H$ irányban tovaterjedő longitudinális dubletnek a vörös felé eső komponense pozitív vagy negatív irányban körben polározott, a rezgő elektron töltése pozitív, illetve negatív. A tapasztalat azt bizonyítja, hogy ha

az emissió a $+H$ irányban történik, akkor a spektrálvonalnak a vörös felé eső, azaz a kisebb frekvenciájú komponense negatív irányban körben polárizott. Tehát az elektron, a melynek rezgése a fényjelenséget okozza, *negatív* töltésű.

Eme, a fényforrásban rezgő és a kathodsugárzásban haladó mozgásban lévő elektronok között mindjárt a ZEEMAN féle jelenség tanulmányozására irányuló vizsgálatok elején felismert qualitativ azonosságot azonnal követte egy nagyfokú quantitativ egyezésnek a felismerése is.

Az (1) alatti képlet segélyével ugyanis lehetséges a kísérletileg meghatározott μ_0 , H és c ismeretével a rezgő elektron speczifikus töltését, $\frac{e}{m}$ -et is megállapítani. A különböző kutatók-tól származó értékeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

A ZEEMAN-effektus útján nyert: $\frac{e}{m} 10^{-7}$									A kathodsugárzásból számított $\frac{e}{m} 10^{-7}$
REESE ¹⁾	KENT ¹⁾	BLYTHWOOD és MERCHANT ¹⁾	FÄRBER ¹⁾	LOHMANN ¹⁾	GEHRCKE és BAEYER ¹⁾	STETTEN-HEIMER ¹⁾	WEISS és COTTON ¹⁾	GMELIN ¹⁾	
1·60	1·59	1·62	1·71	1·75 1·72	1·83	1·791	1·767	1·771	1·8

Látható, hogy az (1) alatti összefüggés segélyével oly $\frac{e}{m}$ értéket nyerünk, mely a lassú *kathodsugárzás*nál translatorikus mozgásban lévő elektronok speczifikus töltésének értékével *nagymértékben* megegyezik.

A ZEEMAN effektus tehát az elektronelméletnek hatalmas támasza.

Az a qualitativ és nagyfokú quantitativ megegyezés, mely a fényforrásban rezgő és a kathodsugárzásnál haladó mozgást végző elektronok között konstatálható, megengedi tehát ama hypothézis felállítását, hogy az a spektrálvonal, a mely a LORENTZ-

¹ Annalen der Physik (28) 1909. 1079. oldal.

féle elmélettel megegyező ú. n. *normális tripletre* bomlik, a fényforrásban jelenlévő egy elektron quasilastikus erő létesítette rezgésének az eredménye.

A Zeeman-effektusok abnormalis és összetett típusai.

Alig indult meg a különböző kémiai elemek spektrálvonalainak e magnetooptikai vizsgálata, már is kiderült, hogy a fenti elmélettel megegyező triplet előállása épen nem tekinthető szabálynak, hanem sokkal inkább kivételnek.

E vizsgálatoknál talált tripletok nagyrésze a normálistól már a komponensek intenzitásvisszonya tekintetében is eltértek. Akadtak nagyszámban oly szétbomlások, melyeknél a spektrálvonal három összetevője egyenlő intenzitásúnak adódott, sőt oly tripletet is találtak, a melyeknél épen a szélső komponenseknek volt nagyobb intenzitásuk.

Még nagyobb abnormitások mutatkoztak a szétbomlások nagyságában. Egy és ugyanazon elem egymással szomszédos spektrálvonalai is egymástól a legnagyobb mértékben eltérően bomlottak szét. A három összetevőre bomló spektrálvonalak ZEEMAN effektusa a legtöbb esetben oly $\frac{e}{m}$ értéket nyújtott, mely úgy a normálistól, mint pedig más spektrálvonal útján nyert $\frac{e}{m}$ értéktől lényegesen eltért.

Ezenkívül akadtak nagyszámú spektrálvonalak, melyek a fényforrásnak a mágneses erőterben való jelenlétele folytán az erővonalakra transversális irányban nem három, hanem ennél több: négy, öt, ... sőt olyanok is, a melyek 17, 19 komponensre is bomlottak.¹

Mindezek a tapasztalati tények, miként természetes, csakhamar kétségbe vonták a ZEEMAN effektusnak alig kifejlő-

¹ R. JACK: Zeeman-Effekt an Wolfram und Molybdän. Inaug.-Diss. Göttingen és Annalen der Physik (28) 1909. 1032. old.

dött elméletét, s látszólag meg is ingatták az elektronelmélet talaját.

De az eme felfedezéseket nyomon követő mélyre ható vizsgálat az e jelenségre vonatkozó ismereteinknek hatalmas lendületet adott. Nagyszámú szétbomlások megfigyelésével, a tapasztalati tények összehalmozásával oly szabályhoz és törvényhez jutottunk, a melyek ezen eltérő szétbomlásokat a normális triplettel kapcsolatba hozzák rámutatván arra, hogy az észlelt látszólagos abnormitások mélyebben fekvő okoknak következménye. Ezek a RUNGE-féle szabály és a PRESTON-féle törvény.

RUNGE¹ a mágneses erőterben összetetten szétbomló spektrálvonalak komponenseinek ama sajátos tulajdonságát ismerte fel, hogy egy ily spektrálvonal összetevőinek frequentiája az eredeti vonal frequentiájától oly értékkel különbözik, mely a fent szereplő normális μ_0 egy kisszámú törtrészenek egészszámú többszöröseként kifejezhető. Ezen, az összes komponenseknél szereplő törtrész az illető spektrálvonal *alapintervalluma*. Így pl. a nátrium D_1 és D_2 vonala a mágneses erőter behatásakor a következő módon négy, illetve hat összetevőre, ú. n. quadrupletre, illetve sextetre szétbomlik:

$$\begin{array}{cccccc} D_1 & & -4a & & -2a & & +2a & & +4a \\ D_2 & & -5a & & -3a & & -a & +a & +3a & +5a \end{array}$$

hol « a » a vonalak alapintervallumát, jelen esetben magát a normális távolságot $a = 1.08$ -ot jelenti. (V. ö. 36. old.)

Az abnormálisnak látszó ZEEMAN-effektusok tehát, ha a normális triplettel nem is azonosak, mindazonáltal azzal egyszerű viszonyba hozhatók. Az e szétbomlások között jelentkező eltérés oka többek között talán abban is keresendő, hogy az elektron rezgése nem csupán az elektromágnes által keltelt mágneses erő hatása folytán bomlik komponensekre. A fényforrásban ugyanis az elektromos tömegeknek szakadatlan mozgása megy végbe; az elektromos tömegek e mozgása is mágneses erőt

¹ Physikalische Zeitschrift 1907. 8. 237. old.

létesít, mely a külső és általunk kísérletileg csupán meghatározható mágneses erőhöz hozzáadódva, a spektrálvonalak szétbontásához a maga mértéke szerint szintén hozzájárulhat.

A PRESTON-féle¹ törvény egy és ugyanazon elem ú. n. series alkotó spektrálvonalainak ZEEMAN effektusára érvényes.

BALMERnek² sikerült legelőször a hidrogén spektrálvonalai között bizonyos törvényszerűséget felismerni. E törvényszerűség abban áll, hogy bizonyos hidrogénvonalak rezgésszám igen nagy közelítésben a pozitív egész számok egy egyszerű függvényeként kifejezhető. Ily spektrálvonalakat series alkotó vonalaknak szokás nevezni. BALMER után számosan, különösen KAYSER és RUNGE³ a különböző elemek, főként az alkáli fémek series formáinak felkeresésével foglalkoztak.

Az ily sorozatba, seriesbe csoportosítható spektrálvonalak általában összetetten bomlanak szét. E mellett érvényes PRESTON által kimondott, RUNGE és PASCHEN⁴ által pedig igazolt ama törvény, hogy egy és ugyanazon series tagjai nemcsak hogy ugyanazon típusú, hanem rezgésszámban kifejezve *ugyanakkora* szétbomlást is mutatnak.

Mivel az elemek legnagyobb részénél, különösen a nagyszámú spektrálvonalakat tartalmazó spektrumban a series alkotó vonalak kikeresése szinte teljesen lehetetlen, közelfekvő ama gondolat, hogy a kérdéses elem ZEEMAN effektusának ismerete a PRESTON-féle törvény alapján — az egyenlően szétbomló spektrálvonalak segélyével — az egy és ugyanazon series alkotó spektrálvonalak s ezzel magához a seriesforma ismeretéhez vezet. Az ily series keresésére irányuló törekvések azon-

¹ TH. PRESTON: Magnetic perturbation of the spectral lines. Nature 59. 1899. 248. old.

² J. J. BALMER: Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs. Wiedemann Annalen (25) 1885.

³ KAYSER: Handbuch der Spektroskopie 1902. (2).

⁴ Sitzungsberichte d. könig. preus. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1902. 308—386, 720—730.

ban csak egyetlen egy esetben, a Wolframnál¹ vezettek ily módon positiv eredményre.

A serieset alkotó spektrálvonalak ZEEMAN effektusának azonossága igazolja, hogy a spektrálvonalaknak ily seriesbe való csoportosulása nem véletlennek tulajdonítható, annak oka magában a fényforrásban keresendő.

Az összetett szétbomlások s ezek fenti törvényszerűségei azonnal kíváncsiságot tettek a LORENTZ-féle elméletnek ez irányban való kibővítését.

Az általánosításnak legközvetlenebb esete volt annak felvétele, hogy a fényforrásban nem egy, hanem több m számú elektron van rezgésben, melyek mozgása azonban bizonyos feltételeknek van alávetve. Az elektronok mozgása tehát nem független egymástól, hanem az elektronok egymással összekapcsolva vannak. E kapcsolat akként fejezhető ki, hogy az elektronok mozgása bizonyos r számú feltételi egyenletnek tesz eleget úgy, hogy az elektronok rezgését csupán $n=3m-r$ egymástól független egyenlet állapítja meg. De ez n számú mozgásegyenlethez n számú periodus tartozik. Tehát az egyenletek egy n komponensből álló felbomlásra vezetnek.²

LORENTZ ez általánosabb elmélete az előbb tárgyalt elemi elméletet is magába foglalja.

LORENTZ után számosan³ kísérelték meg az összetett ZEEMAN-effektusnak valószínű elméletét megadni, mindazonáltal mindmáig oly elméletnek, mely a tapasztalat rendkívül változatos eseteit mind felölelné s azokkal teljes összhangzásba jutna, birtokában nem vagyunk.

Ez elméletek közül különösen fontos RITZ⁴ elmélete nem annyira az elmélet alapját képező hypothésisek tekintetében,

¹ R. JACK: Ann. d. Phys. (28) 1909. 1045. old.

² LORENTZ: Ueber den Einfluss magnetischer Kräfte auf die Emission des Lichtes. Wied. Annalen (63) 1897. 278. old.

³ A. A. ROSE: Ann. d. Phys. 15. 1904. 107. old.

W. VOIGT: Magneto- und Elektrooptik 1908. (Teubner) 186. old.

⁴ W. RITZ: Annalen d. Physik 1908. (4) 25. 683. old.

hanem főként azon oknál fogva, mert ez elmélet oly eredményt nyújt, mely a RUNGE-féle szabály általánosításának tekintethető. Ez oknál fogva ez elmélet eredménye sokkal nagyobb-számú tapasztalati eredménnyel kiváló megegyezésbe¹ jut.

RITZ elmélete ugyanis a spektrálvonalak szétbomlásának ama felfogására vezet, hogy a spektrálvonal a mágneses erőter folytán végtelen sok komponensre bomlik. Ez összetevők közül az erőterrel parallel történő (elektromos) rezgések frequentiáját $\nu = \nu_0 \pm m\omega$, az erőterre merőleges rezgéseket pedig $\nu = \nu_0 \pm \omega' \pm n\omega$ egyenlet határozza meg, a hol ν_0 a tulajdonképeni spektrálvonal frequentiáját, ω és ω' két alkalmasan választott állandót jelent, m és n pedig a nem negatív egész számok sorát felveszi. A végtelen sok komponens intensitása az m és n növekedő értékével rohamosan csökken úgy, hogy az m és n -nek rendesen csak 0, 1, 2 értékei jönnek tekintetbe. A komponensek közül egyesek hiányozhatnak is. A legegyszerűbb eset az, a melynél az erővonalakra merőleges rezgések (komponensek) a parallel rezgésű összetevőkből, ezeknek a pozitív és negatív irányba való megfelelő nagyságú eltolásával származtathatók.

A Zeeman-effektus Voigt-féle elmélete.²

A FARADAY- és a ZEEMAN-féle jelenség, illetve az ezek létrehozásához szükséges kísérleti egybeállítás között sok hasonlóság van. Különösen szembetűnő az egyezés a FARADAY- és az absorptiós longitudinális ZEEMAN effektus között.

A FARADAY-féle jelenség tudvalevőleg abban áll, hogy egy a mágneses erőterben lévő átlátszó test az erővonalakkal parallel haladó fény polározási síkját elforgatja.

A longitudinális absorptiós ZEEMAN-effektusnál a fény ugyancsak az erővonalakkal parallel halad, de az átlátszó test helyét

¹ W. RITZ: Phys. Zeitschrift 1909. 10.

² W. VOIGT: Magneto- und Elektrooptik 1908.

ekkor egy absorptió test foglalja el. Ez esetben az absorptió színekp vonalai az erőtér hatása folytán kettősekké lesznek. Ez a longitudinális absorptió ZEEMAN-effektus lényege.

Tehát a fény mind a két esetben az erővonalakkal parallel halad, mindkettőnél közös a mágneses erőtér jelenlétele, az eltérés csak abban nyilvánul, hogy a mágneses erőtérben először az átlátszó, másodszor pedig egy absorptió test van jelen. A figyelem az első esetben az átbocsátott, az utóbbinál pedig az elnyelt fény bizonyos egymástól eltérő tulajdonságának tanulmányozására irányul.

A két jelenség létrehozásához szükséges közös tényezők szinte sejtetik velünk azt, hogy a FARADAY-féle jelenség és a ZEEMAN-effektus között valamilyen kapcsolatnak fennállania kell. A két jelenség előbb ismertetett elméletei között azonban jóformán semminemű összefüggés sem tapasztalható. A FARADAY-effektust bizonyos czirkuláris kettős törés kelti, a ZEEMAN-féle jelenséget pedig a fényforrásban rezgő elektronok okozzák.

Ez a nagyfokú eltérés, mely a két jelenség magyarázatára szolgáló alaphypothésisek között felmerül, VOIGT oly elméletnek megkonstruálására készítette, melyben mind a két jelenség elmélete ugyanazon alaphypothésisből sarjadzik. Ez elmélet a két jelenségnek a tapasztalattal megegyező összefüggését kidomborítja, e mellett oly addig ismeretlen eredményekre vezetett, melyek a későbbi kísérleti kutatásokkal a legszebb harmoniába jutottak.

VOIGT közvetlenül az absorptió ZEEMAN-effektus elméletét fejti ki. Ha tekintetbe vesszük az eddig mondottakat, azonnal kitűnik, hogy mi készítette őt arra, hogy ép az absorptió, kísérletileg nehezebben hozzáférhető jelenség elméletével foglalkozzék.

De ez elméletből levont összes következtetések a változtatandók megváltoztatásával a direkt ZEEMAN-féle jelenségre is érvényesek lesznek, mert hiszen valamely test emissió- és absorptióképessége egymással arányos, továbbá, mert a tapasztalat szerint a direkt és az invers jelenség között — miként azt az előzőekben láttuk — egy teljes reciprocitás jelentkezik.

Az absorptió és a dispersió legújabb elmélete felveszi, hogy a ponderabilis test molekuláihoz quasierastikus erővel kötött elektronok (lásd 5. old.) még bizonyos *csillapító* erő hatása alatt is állanak. Ez erőnek nagysága az elektron mindenkori sebességével arányos és iránya a sebességgel ellentett irányú.

Vegyük fel, hogy e két erő befolyása folytán az elektron rezgést végez. Ez önrezgés frekvenciája, miként az az elektron mozgásegyenleteiből adódik, két részből áll. Az egyik részt a quasierastikus erő, a másikat ellenben a csillapító erő határozza meg. De a tapasztalat szerint a frekvenciának az utóbbi, a csillapító erő jelenlétele folytán származó része a quasierastikus erővel definiált taghoz képest elhanyagolható csekély, úgy hogy az önrezgés frekvenciája közelítésben

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

alakban írható.¹

Tegyük fel most már azt, hogy ily önrezgést végző elektronhoz fénysugár érkezik. Az elektromágneses fényelmélet a fényt elektromágneses zavarként fogja fel; a dielektrikumban elektromos és mágneses eltolódások (polározások) jönnek létre, melyek az elektron mozgását megváltoztatják. A fényelmélet azonban az absorptió és dispersió jelenségek magyarázatára felveszi, hogy csupán az elektromos erő hatása észrevehető, a mágneses erőé ellenben elenyésző csekély, miért is az elektron mozgásegyenletei a következők lesznek:

$$\begin{aligned} mx'' + hx' + kx &= eX, \\ my'' + hy' + ky &= eY, \\ mz'' + hz' + kz &= eZ. \end{aligned} \quad (2)$$

Az elektromos erő (X, Y, Z), az elektromos induktió ($\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$) és a mágneses erő (L, M, N) a dielektrikumban elektromágneses zavarként tovaterjed s így e vektorok az elektrodinamika

¹ Az állandók jelentését lásd 6. oldalon.

MAXWELL-féle alapegyenleteinek eleget tesznek. Ez egyenleteknek a jelen esetre érvényes alakja (mídon a közeg nem vezető és mágneses permeabilitása az egység):

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} = c \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \dots \frac{\partial L}{\partial t} = -c \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \dots \quad (3)$$

Az elektromos induktió tudvalevőleg az elektromos erővel és a polározott közeg térfogategysége elektromos nyomatékának derékszögű összetevőivel ($\mathfrak{P}_x \mathfrak{P}_y \mathfrak{P}_z$)-vel

$$\mathcal{X} = \varepsilon X = (1 + 4\pi\eta) X = X + 4\pi\eta X = X + 4\pi\mathfrak{P}_x \dots$$

összefüggést mutatja.

Jelentse N a térfogategységben lévő molekulák számát, ekkor

$$\mathfrak{P}_x = Nex \dots$$

Vegyük azonban fel, hogy a jelenségnél több különböző fajta elektron szerepel, melyek a rájuk ható erők, esetleg az elektromos töltésük és ponderikus tömegük tekintetében egymástól eltérnek. Ez esetben a térfogategység nyomatéka több (Nex , Ney , Nez) alakú összeadandóból fog állani, miért is az elektromos induktió összetevői:

$$\mathcal{X} = X + 4\pi\Sigma Nex \quad (4)$$

.

lesz, a hol a Σ az összes elektronfajokra kiterjesztendő összegezést jelenti.

Mindezek az egyenletek képezik az absorptió és a diszpersió elmélet alapját.

Az absorptió és diszpersió egyenletek előrebocsátása után, melyekre az egész VOIGT-féle elmélet alapítva van, rátérünk az elmélet ismertetésére. A következőkben a későbbi fejtegetésekhez szükséges *komplex* törésmutató fogalmának bevezetése után előbb a longitudinális, azután pedig a transversális ZEEMAN-effektus elméletét tárgyaljuk.

Az előzőekben kifejtett hypothésisek a ZEEMAN-féle jelenség VOIGT-féle elméletének is alapját képezik.

E jelenség tárgyalásánál azonban az elektron fenti mozgásegyenleteit a H intenzitású mágneses erőter jelenlétele és az elektron mozgása folytán még ez elektromágneses erő megfelelő összetevőivel is kiegészítenünk kell. Vegyük fel e célból, hogy a mágneses erő iránya a $+Z$ tengely irányával összeesik, mikor is ezen erőkomponensek a 7. oldalon közlöttelkel azonosak.

Az elektron mozgásegyenletei tehát a mágneses erőter jelenléte folytán következő alakúak lesznek:

$$\begin{aligned} mx'' + hx' + kx - \frac{eH}{c} y' &= eX, \\ my'' + hy' + ky + \frac{eH}{c} x' &= eY, \\ mz'' + hz' + kz &= eZ. \end{aligned}$$

Az elektron a reá ható erők folytán periodikus mozgást végez s így az egyenletrendszer megoldása $Ae^{i\omega t}$ alakú. A mozgásegyenletek e megoldásnak helyettesítésével

$$\begin{aligned} (k + h i \nu - m \nu^2) x + i r y &= eX, \\ (k + h i \nu - m \nu^2) y - i r x &= eY, \\ (k + h i \nu - m \nu^2) z &= eZ \end{aligned} \quad (5)$$

alakot öltenek, a hol

$$r = - \frac{e \nu H}{c}$$

rövidített jelzésre szolgál.

Az egyenletrendszerben szereplő elektromos erő természetét a beeső elektromágneses hullám (fény) állapítja meg.

Legyen az absorptió testben tovahaladó fény homogén és sík elektromágneses hullám. Ez annyit jelent, hogy a fénynek amplitudója és phásisa a fény tovaterjedési irányára merőleges egy és ugyanazon síkban mindenütt konstans. E homogén és sík hullám az absorptió testben absorptiót is szenved. Ez absorptiót komplex terjedési sebesség bevezetésével lehet egyszerűen kifejezésre juttatni.

Egy ily homogén, sík és absorptiót szenvedő hullám állapotát a tér minden helyén minden t időpillanatban az

$$Fe^{\frac{2\pi}{T}(t-\frac{r}{o})i}$$

kifejezés jellemzi. E kifejezésben a fény frequentiája $\frac{2\pi}{T}$ és a síkhullámnak a koordinátakezdőponttól való távolsága r valós, az F és o azonban komplexek. Az $F = Fe^{\frac{2\pi}{T}\delta i}$ a fény amplitudóját és kezdeti phásisát adja; a komplex terjedési sebesség o azonban a síkhullám valós sebessége ω és a közeg absorptió indexe x által

$$o = \frac{\omega}{1-ix}$$

összefüggéssel van meghatározva. Az

$$\begin{aligned} Fe^{\frac{2\pi}{T}(t-\frac{r}{o})i} &= Fe^{\frac{2\pi}{T}\delta i} e^{\frac{2\pi}{T}(t-\frac{1-ix}{\omega}r)i} = \\ &= Fe^{-\frac{2\pi x r}{T\omega}} e^{\frac{2\pi}{T}(t-\frac{r}{\omega}+\delta)i} \end{aligned}$$

formulából látható, hogy e kifejezéssel jellemzett fény amplitudója, illetve phásisa a fény terjedési irányára merőleges egy és ugyanazon sík minden pontjában ugyanaz, tehát a hullám tényleg homogén és sík, továbbá, hogy az amplitudó az r növekedésével, azaz a fény tovaterjedésével kisebbedik, tehát e hullám absorptiót is szenved.

Miként a légüres térben és a kérdéses közegben való fény terjedési sebességeknek viszonya a törésmutatót nyújtja, akként a bevezetett komplex sebességgel a közegnek egy komplex törésmutatóját is definiálni lehet:

$$n = \frac{c}{o} = \frac{c}{\omega} (1-ix) = n(1-ix). \quad (6)$$

A komplex törésmutató valós része a közeg valós törésmutatóját, immaginárius része pedig absorptió együtthatóját nx -t nyújtja.

E szerint az absorptiós jelenségek (tehát a ZEEMAN-féle is) elméleti kifejtésének problémája a komplex törésmutató meghatározására van visszavezetve.

A komplex törésmutató amaz alapformulájához, a melyből a ZEEMAN-féle jelenség egész elmélete folyik a (3), (4) és (5) egyenletek útján az x és y -nak eliminálásával juthatunk.

Célom nem lehet a számítások részletes közlése, annál kevésbbé, mert az eljárás hasonló ahhoz a megoldáshoz, a mely a (2), (3), (4) egyenletek kombinálásával a dispersiós és absorptiós jelenségek elméleti kifejtéséhez vezet.

A következőkben előbb a longitudinális, azután pedig a transversalis ZEEMAN-effektus elméletét tárgyaljuk.

1. A *longitudinális* ZEEMAN-effektus elméleti fejtegetésénél fel kell vennünk azt, hogy a beeső fény az erővonalakkal, tehát a Z tengelylyel parallel halad. Az elektromos és a mágneses erő komponensei ez esetben

$$fe^{\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{z}{o} \right) i}$$

alakuak.

Úgy az elektromos, mint a mágneses erő az x és y -tól független, miért is a MAXWELL-féle differenciálegyenletek egyszerűbb alakot öltenek. Ez egyenleteknek a (4) és (5) alatti egyenletekkel való összekapcsolásával és a komplex törésmutató fentebb adott definitiójának figyelembe vételével könnyen kimutatható, hogy a közegben az elektromos erő komponensei és a közeg komplex törésmutatója a következő összefüggéseknek tesznek eleget:

$$\begin{aligned} (X+iY) \left(n^2 - 1 - 4\pi\Sigma \frac{Ne^2}{k + ih\nu - m\nu^2 + r} \right) &= 0, \\ (X-iY) \left(n^2 - 1 - 4\pi\Sigma \frac{Ne^2}{k + ih\nu - m\nu^2 - r} \right) &= 0, \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenlet jelenti, hogy a hullám ismét transversalis.

A két első egyenlet simultán egyenlet, azaz egy időben kielégítve van, a mi csak úgy lehet, hogy ha $X+iY=0$, akkor ezzel egyszerre

$$n_-^2 = 1 + 4\pi \Sigma \frac{Ne^2}{k + i h \nu - m \nu^2 - r},$$

ha pedig $X-iY=0$, akkor ezzel egyszerre

$$n_+^2 = 1 + 4\pi \Sigma \frac{Ne^2}{k + i h \nu - m \nu^2 + r}.$$

A komplex törésmutatók, miként láttuk, a sík hullám terjedési sebességét meghatározzák. Az n_+ és n_- egymástól különbözők, miért is a közegben *két* hullám egymástól *különböző* sebességgel terjed tova. De a két hullám karaktere, polárizációs állapota is különböző. Mindkét elektromágnes hullám vektora (az elektromos erő) komponenseinek viszonya, $\frac{Y}{X}$ az imaginárius egység; a két hullám mindenike tehát körben s mivel e viszonyok előjele különböző, *ellentétben körben* polárizott. A pozitív indexxel jelölt hullámnál az elektromos erő komponenseinek viszonya *negatív*, az n_- törésmutatóval tovaterjedő hullámnál e viszony *pozitív*. A rotáció iránya ezért az első hullámnál *pozitív*, az utóbbinál *negatív* irányú.¹

Ha tehát az előzőekben tárgyalt hypothésiseket elfogadjuk s felvesszük, hogy a mágneses erőterben lévő absorptiók testhez egy az erővonalakkal parallel tovaterjedő síkhullám (fény) érkezik, akkor arra jutunk, hogy az absorptiók közegben két hullám különböző sebességgel terjed tova. E két hullám egymástól eltérő absorptiót is szenved. A törésmutatót és az absorptiók együtthatót az

$$n_{\pm}^2 = 1 + \Sigma \frac{\rho}{\nu_0^2 + i \nu \nu' - \nu^2 \pm \frac{r}{m}}$$

¹ W. VOIGT: Elektro- und Magnetooptik 32. old.

egyenlet határozza meg, a hol

$$\nu_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \nu' = \frac{h}{m}, \quad \rho = 4\pi \frac{Ne^2}{m}$$

jelenti.

Ez egyenlet a komplex törésmutatónak általános kifejezését adja; ez az a formula, a melyből VOIGT a longitudinális ZEEMAN-effektus minden speciális törvényét levezeti.

ν_0 az elektron önrezgésének, ν pedig tényleges rezgésének frekventiáját jelenti.

Láttuk, hogy az absorptiót a komplex törésmutató imaginárius része állapítja meg. Minél kisebb a fenti kifejezésben az imaginárius rész abszolút értéke a valóséhoz képest, annál kisebb az absorptió. Ha pedig a ν értékrendszer az elektronok önrezgésének frekventiájától oly nagy mértékben különbözik, hogy a fenti kifejezés nevezőjében szereplő imaginárius tag abszolút értéke a valós rész abszolút értékéhez képest elenyésző csekély, akkor a test a fényt észrevehetőleg nem nyeli el, a test tehát a beeső fényre nézve átlátszó.

A komplex törésmutatónak fenti általános kifejezése a FARADAY-féle jelenség elméletére vezet, ha a mágneses erőterben az absorptió test helyét egy ily átlátszó test foglalja el.

Ez esetben az imaginárius tag a valós részhez képest elhanyagolható lesz. A komplex törésmutató valóssá lesz, a közegben tehát egy czirkuláris kettőtörés keletkezik, a minek eredménye, hogy a kilépő fény polározási síkja a beesőéhez képest elforgatva lesz.

Az elforgatás szögét az (a) alatti (4. oldal)

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} \frac{\nu l}{c} \left(\frac{c}{\omega_-} - \frac{c}{\omega_+} \right) = \frac{\nu l}{2c} (n_- - n_+) = \\ &= \frac{\nu l}{2c} \frac{n_-^2 - n_+^2}{n_- + n_+} = \frac{\nu l}{4nc} (n_-^2 - n_+^2) \end{aligned} \quad (7)$$

kifejezéssel nyerjük, ha az n_+^2 és n_-^2 helyébe az így nyert értékeket helyettesítjük.

De térjünk most már az invers ZEEMAN-féle dublet elméletének tárgyalására.

Előbb azzal az esettel foglalkoztunk, melynél a ν értékrendszer az összes elektronok önrezgésének frekvenciájától nagy mértékben eltért. Az általánosításnak most már egyik leg-egyszerűbbike annak felvétele, hogy az összes elektronok között csak *egyetlen egy* (0 indexszel jelzett) elektron létezik, a melynek frekvenciája ez elektron önrezgésének frekvenciájától csak alig különbözik, minden más elektron saját rezgésének rezgés-száma azonban ettől lényegesen eltér.

A komplex törésmutató fenti formulájából emeljük ki ezen 0-val jelzett elektronhoz tartozó tagot s a summációt csak a többi elektronra terjeszszük ki:

$$n_{\pm}^2 = 1 + \sum_h \frac{\rho_h}{\left(\nu_h^2 + i\nu\nu'_h - \nu^2 \pm \frac{r_h}{m_h}\right)} + \frac{\rho}{\nu_0^2 + i\nu\nu' - \nu^2 \pm \frac{r}{m}}.$$

Ha már most tekintetbe vesszük azt, hogy az összegben a ν'_h és az r_h -val szorzott tagok $\nu_h^2 - \nu^2$ -hoz képest elhanyagolhatók, akkor kevés átalakítás útján meggyőződhetünk, hogy a komplex törésmutató e kifejezése közelítésben

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 - \frac{\rho}{\nu_0 [2(\mu \mp \mu_0) - i\nu']} \quad (8)$$

alakban írható, a hol rövidség kedvéért

$$\mu = \nu - \nu_0, \quad \mu_0 = \frac{r}{2m\nu_0} = -\frac{eH}{2mc}, \quad n_0^2 = 1 + \sum \frac{\rho_h}{\nu_h^2 - \nu_0^2}$$

jelenti.

E kifejezésben n_0 valós s így az immaginarius tag (ennek folytán az absorptió is) csupán a (0) elektron jelenlétele folytán származhat.

E komplex törésmutató érvényes, ha az elektronrezgések mágneses erőterben mennek végbe. Ha azonban a mágneses erőteret eltávolítjuk, azaz a közönséges értelemben vett absorptió jelenséggel foglalkozunk, akkor az eddigi meggondolá-

sok mind változatlanok maradnak, csupán H helyébe mindenütt zérust kell helyettesítenünk. Ennek eredménye, hogy a közönséges absorptiónál a komplex törésmutatót (8)-al azonos képlet állapítja meg, a különbség csak abban van, hogy itt $\mu_0 = 0$.

Tehát a mágneses erőter jelenlétekor úgy a pozitív, mint a negatív irányban körben polározott hullám törésmutatójának n és az absorptió együtthatójának nx -nak menete *teljesen* ugyanaz, mint az erőter gerjesztése nélkül, a különbség csak abban van, hogy az ezeket előtűntető görbék *kezdőpontja* az egyik hullámnál az egyik, a másikonál az ellenkező irányban u_0 -val van eltolva.

Az absorptió elmélet értelmében azonban a $(\mu - \mu_0 = 0)$, azaz $\nu = \nu_0 + \mu_0$ és $(\mu + \mu_0 = 0)$, azaz a $\nu = \nu_0 - \mu_0$ helyen absorptióis vonalnak kell lennie. Tehát az eredetileg $\nu = \nu_0$ frequentiánál lévő absorptióis vonal a mágneses erőter behatásakor két absorptióis vonalra bomlik. Mivel pedig az elektron töltése negatív, azaz μ_0 pozitív, azért növekedő intenzitású mágneses erőternél a pozitív irányban polározott hullám absorptióis vonala a nagyobb frequentiák, azaz az ibolya, a negatív hullámé pedig a vörös felé tolódik. (V. ö. a 11. old. közölt tapasztalattal.)

Ha tehát az absorptióis testen az erővonalakkal parallel haladó természetes fehér fény halad keresztül, akkor az absorptióis spektrum vonalai kettős vonalakra bomlanak, melyek az eredeti absorptióis vonaltól

$$\mu_0 = \frac{eH}{2mc}$$

-al a vörös és az ibolya felé eltolva vannak. (V. ö. 6. oldal (1) egyenlettel.)

E jelenség az invers longitudinalis ZEEMAN-féle dublet.

Az előzőekben kifejtett hypothésisek tehát úgy a FARADAY, mint pedig a longitudinalis invers s ezzel a KIRCHOFF-féle törvény értelmében a direkt ZEEMAN-féle jelenség elméletének is alapját képezik. A két jelenség közötti kapcsolat ennél fogva megállapítható.

Láttuk ugyanis azt, hogy ha a fény a mágneses erőterben lévő testen keresztül a mágneses erővonalakkal parallel halad, akkor polározási síkja bizonyos χ szöggel elfordul, melynek nagysága az $(n_-^2 - n_+^2)$ -al arányos. Az elfordulás oka a mágneses erőter létesítette czirkuláris kettőtörés.

Ugyanilyen czirkuláris kettőtörés jön létre, miként az imént láttuk az esetben is, ha az átlátszó test helyét egy absorptió test foglalja el. Ez oka a ZEEMAN-féle dubletnek.

Ez a két jelenség közötti nagy hasonlóság keltette VOIGT-ban ama gondolatot, hogy az absorptiók vonalak közelében ép úgy, miként a FARADAY-féle jelenségnél a fény polározási síkjának elforgatását kell tapasztalnia. A polározási sík ezen elforgatásának szükségessége közvetlenül a VOIGT-féle elméletből folyik, mely a pozitív és a negatív körben polározott hullám törésmutatójának ismeretével (7) alatti egyenlet alapján az elforgatás szögét is megadja.

De az elmélet többet is mond; megmutatja azt, hogy az elforgatás maximuma a negatív irányban körben polározott hullám törésmutatójának maximumánál és a pozitív hullámnál a törésmutató minimumánál van. Tehát megállapítja a kísérleti berendezés módját, rámutatván arra: hol kell az elforgatást kísérletileg keresnünk?

Ez alapon sikerült is két olasz physikusnak MACALUSO és CORBINONAK az elforgatást *tényleg* és az elméletnek *megfelelően* észlelnie.¹

2. A *transversalis* ZEEMAN-effektus elméleti fejtegetésénél fel kell vennünk azt, hogy a beeső fény az erővonalakra merőlegesen, pl. az X tengellyel parallel halad. Az elektromos és a mágneses erőkomponensek ez esetben

$$f e^{\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{o} \right) i}$$

alakuak.

¹ Comptes Rendus 127. 1898.

Vezessük be az így definiált elektromos és mágneses erőket a MAXWELL-féle differenciálegyenletekbe és kombináljuk ezeket a longitudinalis ZEEMAN-effektus tárgyalásánál vázolt eljárással, a (4) és az (5) egyenletekkel. Az elektron koordinátáinak eliminálása után a következő egyenletekhez jutunk:

$$n_z^2 = 1 + 4\pi \Sigma \frac{Ne^2}{k + i h \nu - m \nu^2},$$

$$(X \pm iY) \left(1 + 4\pi \Sigma \frac{Ne^2}{k + i h \nu - m \nu^2 \pm r} \right) = \pm i n_m^2 Y. \quad (9)$$

Az n_z törésmutató a z , azaz az erővonalakkal parallel elektromos erőkomponenssel, az n_m ellenben az X és Y , azaz a mágneses erővonalakra merőleges elektromos erőkomponensekkel definiált hullámhoz tartozik.

A míg ugyanis a jelen esetben a MAXWELL-féle differenciálegyenletekben a Z erő izoláltan előfordul, addig az X és Y erők egymással összekapcsolva vannak.

Az X tengely irányában ennél fogva két elektromágneses hullám terjed tova.

A Z elektromos erőhöz tartozó hullám *transversalis* és a mágneses erővonalakra *merőleges síkban* polározott.

Az X elektromos erőkomponens általánosságban *nem* zérus. A MAXWELL-féle egyenletek első csoportjának első egyenlete (3) ugyanis y és z -től független mágneses erő esetén

$$\mathfrak{X} \equiv X + 4\pi \Sigma N e x = 0$$

egyenletre vezet, a miből azonnal látszik, hogy az X általánosságban *nem* tűnhet el. Az X az elektromos eredő erőnek a fénytovaterjedés irányába eső komponense, miért is az X és Y elektromos összetevők által definiált hullám *nem* transversalis.

E hullám polározási állapotát, mivel az X erő longitudinalis, csupán az Y , azaz a mágneses erővonalakra és a fény terjedési irányára merőleges elektromos erő iránya határozza meg, tehát e hullám az erővonalakkal *parallel síkban* polározott.

Az n_z komplex törésmutató a (9) egyenlet alapján a mágneses erőterétől teljesen független. Tehát a mágneses erőter a mágneses erővonalakra merőleges síkban polározott fényre, a komplex törésmutatót illetőleg, semminemű befolyást sem gyakorol: a fény absorptiós vonala *változatlan* marad.

Az X és Y elektromos erők által definiált hullám törésmutatója azonban a mágneses erőter jelenléte folytán, miként az a (9) egyenletből kitűnik, változást szenved. A második zárójeles kifejezéssel már találkoztunk; ez a mágneses erővonalakkal parallel tovaterjedő két ellentetesen körösen polározott hullám komplex törésmutatójának négyzetét n_{\pm}^2 -t jelentette.

Vezessük be e komplex törésmutatókat a fenti egyenletbe és elimináljuk abból az X és Y erőkomponenseket, mely művelet az egyenlet által definiált két egyenlettel könnyen eszközölhető. Az eliminálás az

$$\frac{1}{n_m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_+^2} + \frac{1}{n_-^2} \right) \quad (10)$$

egyenletre vezet, mely az X és Y erőkomponensekkel definiált hullám komplex törésmutatóját n_m -et nyújtja.

Ez az az alapformula, melyből a transversalis ZEEMAN-effektus összes tulajdonsága levezethető.

Vegyük most már fel azt, hogy tényleges absorptióval van dolgunk. Ez annyit jelent, hogy az n_m , n_+ és n_- komplexek és így ezek a valós törésmutatók és az absorptiós együtthatók által a (6) egyenlettel definiált módon meghatározva vannak.

Az X és Y erők definiálta hullám valós törésmutatójának és absorptiós együtthatójának ismeretéhez a (10) egyenlet alapján jutunk, ha abban a komplex törésmutatókat a megfelelő valós törésmutatókkal és absorptiós együtthatókkal helyettesítve, a valós és imaginárius tagot különválasztjuk. S mivel a legtöbb esetben az absorptió indexe x oly kicsiny, hogy annak négyzete az egység mellett elhanyagolható, ezért a szóban forgó hullám valós törésmutatójának és absorptiós indexé-

nek törvényszerűsége a következő közelítő formulában van kifejezve:

$$\frac{1}{n_m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_+^2} + \frac{1}{n_-^2} \right), \quad \frac{x_m}{n_m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_+}{n_+^2} + \frac{x_-}{n_-^2} \right).$$

Hogy az absorptió együtthatójának, az $n_m x_m$ -nek menetét világosan láthassuk, az utóbbi formulába még egy közelítést kell bevezetnünk. A gázok és gőzök n_m , n_+ és n_- törésmutatói ugyanis egymástól, a legnagyobb valószínűség szerint, oly kevésel térnek el, hogy e második egyenlet közelítésben az

$$n_m x_m = \frac{1}{2}(n_+ x_+ + n_- x_-) \quad (11)$$

egyenlettel helyettesíthető.

Ez egyenlet az X és Y elektromos erők által definiált hullám absorptiók együtthatójának menetét nyújtja, mely szerint ez együttható az erővonalakkal parallel tovaterjedő két ellentetten körösen polározott hullám absorptiók együtthatójának számtani középértékével egyenlő.

S ezzel az invers transversalis ZEEMAN-féle triplet elmélete már megvan.

Ugyanis az utóbbi egyenlet értelmében az X és Y erők által definiált hullámnak absorptiók vonalai ugyanott vannak, a hol az erővonalakkal parallel tovaterjedő két ellentetten körösen polározott hullám absorptiók vonalai fekszenek. Tehát e hullámnak két absorptiók vonala van, mely az eredeti (tehát a mágneses erőtér gerjesztése nélkül lévő) absorptiók vonaltól a (8) alapján μ_0 -val jobbra és balra van eltolva.

E két absorptiók vonalhoz hozzájárul a Z erőkomponenshez tartozó hullám absorptiók vonala, mely, miként láttuk, az eredeti absorptiók vonal helyére esik.

A három absorptiók vonal közül a szélsők intenzitása egyenlő, de kisebb erősségű mint a középső vonalé.

Az X és Y erőkhöz tartozó hullám, mely a két szélső absorptiók vonalat kelti, miként láttuk, a mágneses erővonalakkal parallel síkban, a Z erő által definiált hullám, melyből a

középső komponens származik, a mágneses erővonalakra merőleges síkban polározott.

Ez a jelenség pedig az invers ZEEMAN-féle triplet.

Az elmélet tárgyalásánál a (11) alatti közelítő formulát kellett felhasználnunk.

VOIGT elméletét tovább vezeti. Minden tömegelemben az elektronok egész serege rezgést végez, melyek az egymás által keltett hullámokat befolyásolják.

VOIGT a szigorúbb formulából indul ki s ezzel oly dissymmetrikus tripletre jut, melynél a nagyobb frequentiák, tehát a spektrum ibolyarésze felé eső komponensnek a középső komponenstől való távolsága nagyobb, de intenzitása kisebb a vörös felé eső komponens távolságánál, illetve intenzitásánál. Ez elméletnek a tapasztalattal való egyezését a vas spektrumának bizonyos vonalaira nézve ZEEMAN konstataulta. Újabban azonban akadtak olynemű észlelések, melyeknél a talált dyssimetriák az elmélettől eltérő karaktert mutattak.¹

A ZEEMAN-effektusra vonatkozó eddigi vizsgálatok VOIGT: Magneto- und Elektrooptik cz. könyvében vannak részletesen tárgyalva. E munka képezte ismertetésem alapját is.

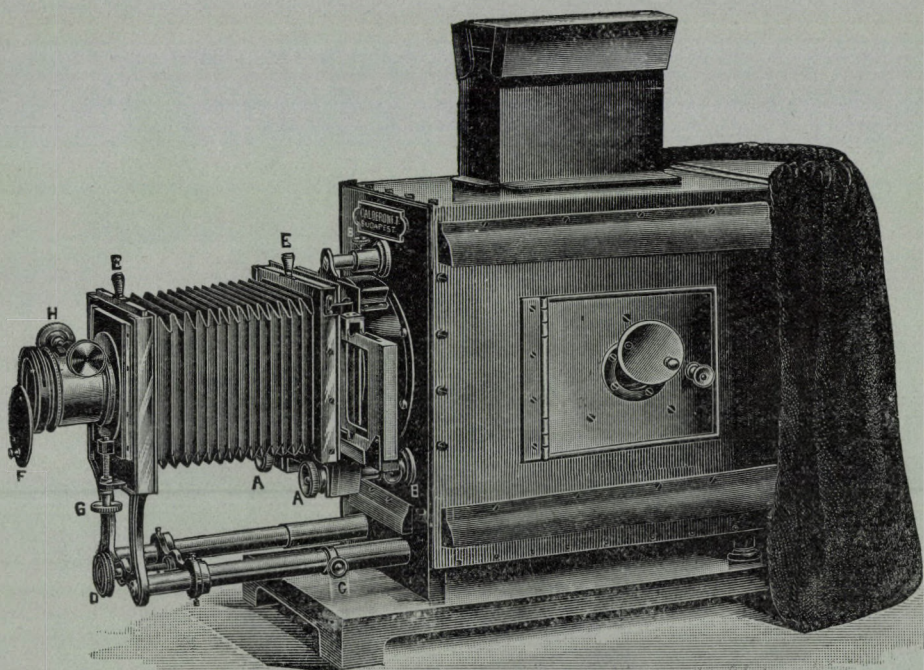
Rybár István.

¹ L. pl. MOOREnak a thorium ZEEMAN-effektusáról szóló dolgozatát a Phys. Zeitschrift 1909. (10)-ben.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésű szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni Ib»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségű aczélemezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. atm. kettős megvilágítólenesével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektívet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bárszonymból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül*

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van iktatva. — Ezen felszerelés vetítő készülékünket a legtökéletesebb ilyenmű készülékké avatja. *Ára lámpa nélkül* **K 350.—**

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságú vetítési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 340, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként **K 24.—**

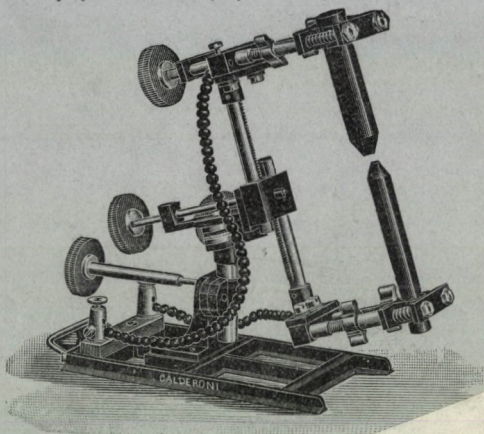
Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgy szintén szinképek, interferenciális tűnemények, fényelhajlási, fénycsarkítási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközkörről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mérsfényvel, acetilénnel, borszesz-izzófényvel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segítségével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. *Ára* **K 120.—**

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. *Ára* **K 90.—**



Borszesz-izzófénylámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 grammos fény erejű világítást szolgáltat. *Ára teljesen felszerelve* **K 50.—**

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezettel segítségével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. *Ára* **K 110.—**

Vetítési ernyő finom vászonból 200 cm. negyzetben, gyűrűkkel ellátva. *Ára* **K 8.—**

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. *Ára szekrényben* **K 30.—**

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legegyszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
<i>Ára</i>	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.



MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ és RADOS GUSZTÁV

HUSZADIK ÉVFOLYAM

IV—V. FÜZET

1911

ÁPRILIS—MÁJUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1911.



TARTALOM.

lap

KLUG LIPÓT: A másodrendű felület- és a tétraederből lezármaztatható hiperboloidikus fekvésű egyenesekről	157
BÁRÓ HARKÁNYI BÉLA: A forgási ellipsoid meridiánhosszáinak minimumáról állandó térfogat mellett	163
DIENES VALÉRIA és DIENES PÁL: Analytikai függvények algebrai és logaritmikus szingularitásairól (Második közlemény.)	169
RYBÁR ISTVÁN: A lanthán és a kobalt spektrálvonalainak Zeemann-effektusáról (Második és befejező közlemény.)	198
Irodalom. JAEGER IMRE: Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn	249

A Matematikai és Fizikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24–30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszadik társulati év 1911 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnásiumi tanár (VI., Nagy János-utca 37.) címére beküldeni. A *mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6–6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első és harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem fizikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy matematikai és egy fizikai tárgy — 2–3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár címére **VIII., Sándor-utca 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (cikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a matematikai tárgyak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a fizikai tárgyak pedig *Kövesligethy R.* címe alatt. A reclamatiók, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

A reclamatiók, címváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

A MÁSODRENDŰ FELÜLET- ÉS A TÉTRAEDERBŐL LESZÁRMAZTATHATÓ HIPERBOLOIDIKUS FEKVÉSŰ EGYENESEKRŐL.

CHASLES a geometria története című munkája 32. jegyzetében ¹ a másodrendű felület- és egy tétraederből leszarmaztatható hiperboloidikus fekvésű egyenesekről közöl tételeket. Jóllehet CHASLES e tételeket nem igazolja, de mind a mellett közismerteknek tekinthetjük azokat, mert fontosságuknál fogva minden nagyobb geometriai munkában bizonyításaikkal együtt megtalálhatók.

A következőkben szintén a másodrendű felület- és a tétraederből leszarmaztatható hiperboloidikus fekvésű egyenesekről két dualis tételt akarunk bemutatni és ezzel CHASLES-nak tételei két új tétellel nyernek kiegészítést. A bebizonyítás zavartalan megértése végett azonban előre kell bocsátanunk néhány kevésbé ismert tételt a háromszög oldalain és a tétraeder élein alkotható úgynevezett kapcsolt involucziókról.

★

1. Valamely kúpszelet egy háromszög oldalait pontpárokból metszi; e pontpárok és az egyes oldalakon levő csúcspontok három involuczió társponjtjainak tekinthetők és ily három involucziót újabban kapcsolt involucziónak nevezünk. Tulajdonsága ennek, hogy bármily három társpontpár az egyes involucziókból ugyanegy kúpszeleten van, tehát valamely egyenes

¹ CHASLES: Aperçu historique; Note XXXII.

és a háromszög oldalai metszésének társpontjai szintén egy egyenesen, az előbbihez *rendelt* egyenesen vannak.¹ Ezért: az első involúció bármely pontjából a másodiknak összes pontjai, a társpontjából pedig azoknak társpontjai a harmadik involúciónak társpontjaiba projicziáltatnak. Ebből pedig az következtethető, hogy ha egy kúpszelet a kapcsolt involúciók tartóit az UU_1 , VV_1 és WW_1 pontpárokból metszi, úgy a pontoknak társpontjai $U'U_1$, $V'V_1$, $W'W_1$ szintén egy kúpszeleten, az előbbihez úgynevezett konjugált kúpszeleten vannak.

Ugyanis α -át tekintve az $U(VV_1WW_1)$, $U_1(VV_1WW_1)$ sugárnégyesek projektívek; a kapcsolt involúciók miatt pedig az $U'(V'V_1W'W_1)$, $U'_1(V'V_1W'W_1)$ sugárnégyesek amazokkal, tehát egymással is projektívek és így állításunk igazolva van.

Ha valamely tétraeder élháromszögein kapcsolt involúciókat veszünk fel, akkor az ily hat involúciónak (mely négyszer három kapcsolt involúcióból áll) az a tulajdonsága, hogy egy másodrendű felület és a tétraeder éleknek tizenkét metszőpontjához a társpontok az involúciókban szintén egy másodrendű felületen vannak. Ugyanis a másodrendű felület kúpszeleteihez az egyes tétraederlapokon az előbbiek szerint egy-egy kúpszelet konjugált a kapcsolt involúciókat illetőleg és a leszármaztatott négy új kúpszelet egymást páronként a tizenkét metszéspont társpontjaiban metszi és így ezek szintén ugyanegy másodrendű felületen vannak.²

Ezek után már megkezdhetjük a hiperboloidikus fekvésű egyenesekre vonatkozó tárgyalásunkat.

2. Messe valamely kúpszelet az ABC háromszög BC , CA és AB oldalait az 12, 34 és 56 pontpárokból (lásd a mellékelt ábrát). Tizenkét oly egyszerű hatszöget találunk, a melynek szögpontjai a 12, 34, 56 pontok és nem egymásra következő oldalai a 12, 34 és 56 oldalak. E tizenkét PASCAL-hatszög PASCAL-egyenesei egymást hármasával négy STEINER-pontban

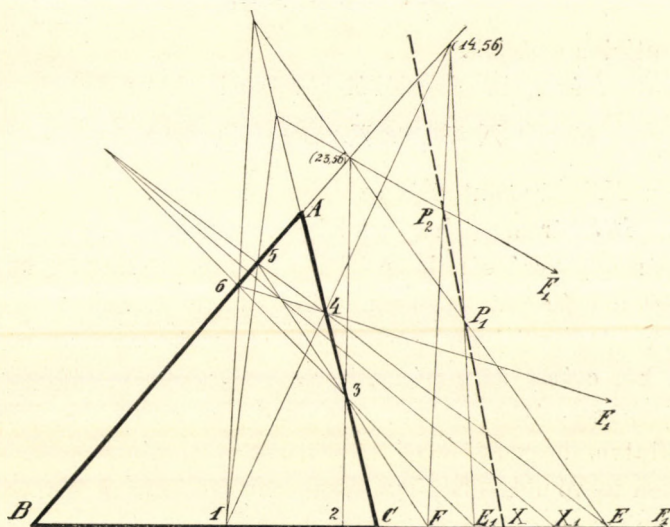
¹ KLUG: Projektiv geom. elemei (1892); 127. old.

² STURM: Geom. Verwandtschaften (1908), I. köt., 163. old.

metszik és e négy STEINER-pont egy STEINER-egyenesen van. E STEINER-egyenesről azt mondjuk, hogy az a 12, 34 és 56 oldalaktól képezett háromszöghez, tehát az ABC háromszöghez van rendelve.

Ez a STEINER-egyenes pedig már meg van határozva az

$$\begin{array}{ll} 123456, & 123465, \\ 143652, & 143562. \end{array}$$



PASCAL-hatszögpárok PASCAL-egyenesének P_1, P_2 metszéspontjait, a melyeknek, mind STEINER-pontoknak összekötő egyenese az ABC háromszöghöz rendelt STEINER-egyenes P_1P_2 .

A

$$P_1P_2(14, 56)(23, 56)$$

csücsokkal bíró négyszög szemben fekvő oldalai: az $AB \equiv 56$ oldal a P_1P_2 STEINER-egyenes fölnebbi két pár PASCAL-egyenes; ezek tehát a BC oldalt egy I_1 involúciónak

$$B, X; (12, 45) \equiv E, (12, 35) \equiv F; (12, 36) \equiv E_1, (12, 46) \equiv F_1$$

tárpontjaiban metszik.

A 3456 négyszög szembenfekvő oldalai és a felvett kúpszelet a BC oldalt egy I involuczióknak

$$EE_1, FF_1, BC, 12$$

tárpontjaiban metszik, végre még a 45, 35; 36, 46; 34 egyenesek és az A pontnak a kúpszeletre vonatkozó polárisa, a mit egy négyszög szemben fekvő oldala a BC -t egy I_2 involuczióknak

$$EF, E_1F_1, CX_1$$

tárpontjaiban vágják.

Az I_1 , I és I_2 involuczióból következik, hogy

$$EE_1FX \frown FF_1EB \frown F_1FE_1C \frown E_1EF_1X_1,$$

azaz az XX_1 tárpontpárja az I involuczióknak.

Az ABC háromszöghez rendelt STEINER-egyenes és a háromszög bármelyik csúcsának polárisa a kúpszeletre nézve a háromszögnek a csúccsal szemben fekvő oldalán annak az involuczióknak tárpontjaiban metszik, a melynek ez oldalon levő másik két csúcsa és a kúpszelettel való metszőpontpárja más két tárpontpárja.

Tekintve, hogy az ABC háromszög csúcsainak polárisai a szemben fekvő oldalakkal egy egyenesen találkoznak következik: hogy ehhez az egyeneshez rendelt egyenes azokban a kapcsolt involucziókban, melyeket a háromszög és a kúpszelet meghatároz (1) a háromszöghöz rendelt STEINER-egyenes.

A talált eredményt következő tétellel akarjuk kifejezni:

Egy kúpszelet valamely háromszög oldalait egy PASCAL-háromszög csúcspontjaiban metszi, a mely metszéspontok a háromszög oldalain három kapcsolt involucziót határoznak meg. A PASCAL-háromszögnek a háromszöghöz rendelt STEINER-egyeneséhez az egyeneshez van rendelve a kapcsolt involucziókban, a melyben a háromszög oldalai a polárháromszögének oldalait metszik.

3. CHASLES szerint valamely tétraeder csúcsainak poláris síkjai egy másodrendű felületre vonatkozólag a szemben fekvő

lapokat négy hiperboloidikus fekvésű egyenesben metszik, mert mindegyike szelője azoknak az egyeneseknek, a melyekben az élháromszögek síkjaiban fekvő kúpszeleteket illetőleg az élháromszögek polárisháromszögeinek oldalai, amazoknak homolog oldalaival találkoznak. Ez utóbbi egyenesek tehát az előbbiekkel együtt ugyanegy hiperboloidon vannak és ezért hivatkozva az (1) és (2) alatt találtakra mondhatjuk:

Egy tétraeder élháromszögei valamely másodrendű felületet négy PASCAL-hatszög csúcsaiban metszik. E PASCAL-hatszögeknek az élháromszögekhez rendelt STEINER-egyenesei hiperboloidikus fekvésűek.

Ez volna az első tétel, a melyet a CHASLES-tételek kiegészítőjének tekintünk.

Mikép szól ennek dualis tétele?

4. Hogy e tételnek dualis tételét képezhessük előbb kifejezzük a kúpszelet és a háromszögre vonatkozó tételnek dualitását.

Vegyük fel e végből egy kúpszelet síkjában az ABC háromszöget és vezessük ennek A , B és C csúcsából a kúpszelethez a 12, 34 és 56 érintőpárokat. Ezek egy BRIANCHON-hatoldalt képeznek, a melyre nézve a PASCAL hatszög dualis tételei érvényesek. E szerint az 123456, 143652 és 163254 hatoldal szemben fekvő csúcsait összekötő egyenesek (a hatoldal főátlói) egymást egy-egy BRIANCHON-pontban metszik és e három BRIANCHON-pont ugyanegy egyenesen van. Ezt az egyenest a hatoldal STEINER-egyenesének akarjuk nevezni, mely elnevezés dualis a PASCAL-hatszög STEINER-pontjának.

Még háromszor választhatunk ki három-három egyszerű hatoldalt az 123456 teljes hatoldalból, a melyeknek ép úgy mint amazoknak egyrészt három nem egymásra következő csúcsa az ABC háromszög csúcsa, másrészt melyeknek BRIANCHON-pontjai szintén harmoniként egy-egy STEINER-egyenesen vannak. Ez a három egyenes pedig egymással az előbbi STEINER-egyenesen találkozik. E találkozási pontot az 123456 BRIANCHON-hatoldal ABC háromszögéhez rendelt STEINER-pontnak akarjuk nevezni.

Az *ABC* háromszög csúcaiból a kúpszelethez vezetett érintő-párok, valamint a háromszög oldalpárjai társsugarai három kapcsolt sugárinvolúciónak, a melynek dualisan az előbbivel (a kapcsolt pontinvolúciókkal) az a tulajdonsága, hogy az egyes involúciók egy ponthoz futó sugarának társsugarai szintén egy pontban találkoznak, a melyet amahhoz *rendelt* pontnak nevezünk.

E magyarázatok után már kifejezhetjük a kúpszelet és háromszögre vonatkozó tételnek dualis tételét ekképen:

Egy háromszög csúcaiból síkjának valamely kúpszeletéhez vezetett érintőpárok egyrészt egy BRIANCHON-hatoldalt, másrészt a háromszögoldalakkal együtt három kapcsolt involúciót határoznak meg. A háromszögoldaloknak a kúpszeletre vonatkozó pólusait a szemben fekvő csúcsokkal összekötő egyenesek metszőpontjához rendelt pont a kapcsolt involúciókban, STEINER-pontja a felvett háromszöghöz rendelt BRIANCHON-hatoldalnak.

A másodrendű felület és a tétraederre vonatkozó tételnek dualis tétele pedig így szól:

Egy tétraeder éleiből valamely másodrendű felülethez tizenkét érintősík vezethető, melyek az egyes tétraederlapokon az élháromszögektől eltekintve BRIANCHON-hatoldalakat metszenek ki. E BRIANCHON-hatoldaloknak az élháromszögekhez rendelt STEINER-pontjait a szemben fekvő tétraedercsúcsokkal összekötő egyenesek hiperboloidikus fekvésűek.

Klug Lipót.

A FORGÁSI ELLIPSOID MERIDIÁNHOSSZÁNAK MINIMUMÁRÓL ÁLLANDÓ TÉRFOGAT MELLETT.

PÉCSI ALBERT úr e Lapok egyik utóbbi füzetében¹ azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy lapult forgási ellipsoid meridián-görbéjének ívhossza milyen excentricitás mellett minimum, ha az ellipsoid térfogata adott állandó.

Ha a az ellipsoid nagy tengelye és ε a meridiánellipszis excentricitása, akkor ismeretes formula szerint a meridián-ellipszis ívhossza:

$$s = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (1)$$

a térfogat állandóságát pedig az

$$a^3(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} = \text{Const.} \quad (2)$$

egyenlet fejezi ki. Pécsi úr a minimum megállapítása végett az (1)-ben szereplő elliptikus integrált az ismert hatványsorba fejtven, (2) segítségével ε -t eliminálja; az így származó sornak csak első két tagját hagyván meg, keresi az így fellépő, a -ban 6-fokú függvény minimumát. De az így talált $\varepsilon_0 = 0.6325$ közelítő érték a minimum szigorú feltételét nem elégítheti ki tökéletesen s mint maga is hangsúlyozza, ε_0 pontos értéke az így kiszámított közelítő értéknél mindenesetre nagyobb.

Az e célra kevésbé alkalmas, lassan konvergáló hatványsor helyett czélszerűbbnek találtam a következő eljárást: a -t (1)-ből kiszámítva s az állandó tényezőket elhagyva a feladat az:

¹ Mathem. és Phys. Lapok 19. évfolyam 366. l.

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{6}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{E}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{6}}}$$

függvény minimumának megállapítása lesz, tehát

$$f'(\varepsilon) = 0 \quad (3)$$

pozitív gyökét kell kiszámítanunk, mely az idézett helyen a 370. lapon közölt graphikus ábrázolás szerint $\varepsilon = 0.8$ környékén fekszik és minimumnak felel meg. Mivel:

$$f'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{E}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{6}}} \right] = \frac{1}{3} \frac{E\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{7}{6}}} + \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dE}{d\varepsilon}$$

és

$$\frac{dE}{d\varepsilon} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{\varepsilon} (E-K),^1$$

ha az itt fellépő elsőfajú teljes elliptikus integrált

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

szerint a szokásos módon K -val jelöljük. Ezen értékeket (3)-ba helyettesítve, némi rendezés után lesz a minimum feltétele:

$$1 + \frac{\varepsilon^2}{3(1-\varepsilon^2)} - \frac{K}{E} = 0. \quad (4)$$

A numerikus megoldás céljára FRÖHLICH Math. Repertoriumának XIV. tábláját használva, célszerű az ε modulus helyett az α szöget bevezetni az:

$$\varepsilon = \sin \alpha \quad (5)$$

egyenlet szerint; ezen helyettesítés után a:

$$\varphi(\alpha) = 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{K}{E} = 0 \quad (6)$$

numerikus számításra kényelmes egyenlet származik. Kiindulás-

¹ FRÖHLICH: Math. Repert. 167. 1. 19. formula.

pontul az $\varepsilon = 0.8$ -nek megfelelően α legközelebbi kerek számú értékét: 53° -ot választva, néhány kísérlet után meggyőződünk, hogy a keresett gyök $50^\circ 30'$ és 51° között fekszik, mint azt a következő, 5-jegyű lagarithmusokkal számított adatok mutatják:

α	$\varphi(\alpha)$	
$50^\circ 0'$	-0.00923	
$50^\circ 30'$	-420	$+ 503$
$51^\circ 0'$	$+ 104$	$+ 524$
$51^\circ 30'$	$+ 674$	$+ 570$

A differenciák menetéből láthatjuk, hogy az egyszerű arányos interpolatio α második és harmadik értéke közt eléggé pontos közelítést fog adni, nem tévesztve szem elől, hogy az 5. tizedesek már meglehetősen bizonytalanok. Az így talált érték: $\alpha_0 = 50^\circ 54.05$ már igen kielégítő és mint a behelyettesítés mutatja, csak jelentéktelen javításra szorul. Végeredményben ily úton az $\alpha_0 = 50^\circ 54.23$ értéket találtuk, mely (6)-ot csaknem pontosan kielégíti, mert ez esetben $\varphi(\alpha) = -10^{-5}$; ezen α -nak pedig (5)-ből

$$\varepsilon_0 = 0.77608$$

excentricitás felel meg, hol az utolsó tizedes már csak kevésbé pontos. A keresett minimum környékén $f(\varepsilon)$ igen lassan változik; a kiszámított függvényértékekből látható, hogy $\log f(\varepsilon)$ még az 5. tizedesben sem mutat az előbb vizsgált $1\frac{1}{2}$ fokos közben változást.

ε_0 pontosabb kiszámítására a vázolt eljárás szerint E és K -nak több tizedesre adott, részletesebb táblái volnának szükségesek. Ezek nélkül legcélszerűbbnek látszott a feladat a JACOBI-féle θ -függvények bevezetése útján a következőképen megoldani. Itt csak a legszükségesebb alapegyenletekre szorítkozva, ε helyébe k -t írva lesz a szokásos jelölésekkel ¹

¹ L. ezen egyenletekre nézve az analysis részletesebb tankönyveit és APPEL és LACOUR: «Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications» című művét.

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}, \quad (7)$$

$$k^2 + k'^2 = 1; \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \quad (8)$$

$$\theta(u) = 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} \mp \dots$$

$$\theta_1(u) = 1 + 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} + \dots$$

hol e soroknak az itt kívánt közelítésnek megfelelően csak első három tagját írtuk fel. Ebből a k' complementär modulus és a későbbiekben szükséges $\theta''(0)$ ugyanilyen pontossággal:

$$k'^2 = \frac{\theta^4(0)}{\theta_1^4(0)} = \left(\frac{1 - 2q + 2q^4 \mp \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots} \right)^4, \quad (9)$$

$$\theta''(0) = 2 \frac{\pi^2}{K^2} (q - 4q^4 \pm \dots) = \frac{8}{\theta_1^4(0)} (q - 4q^4 \pm \dots),$$

mivel:

$$\frac{2K}{\pi} = \theta_1^2(0). \quad (10)$$

Ezen formulák alapján a (4)-ben szereplő E integrál könnyen kifejezhető, ugyanis:

$$E = K - k^2 I.$$

hol $k^2 I$ a következő integrál:

$$k^2 I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

mely $\sin \varphi = sn u$ behelyettesítés után ismert módon kiszámítható és lesz:¹

$$k^2 I = k^2 \int_0^K sn^2 u = K \frac{\theta''(0)}{\theta(0)};$$

s így:

¹ l. APPEL-LACOUR id. h. 144. l.

$$E = K \left[1 - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} \right]. \quad (11)$$

A (4) egyenletbe most már ε helyébe k -t írva egyszerű átalakítás után lesz a minimum feltétele:

$$\frac{3(1-k^2)+k^2}{3(1-k^2)} - \frac{K}{E} = 0;$$

vagyis:

$$\frac{1+2k'^2}{3k'^2} - \frac{K}{E} = 0;$$

mely egyenletet $\frac{1}{k'^2}$ szerint feloldva és megfelelő mennyiségeket (9)–(11)-ből betéve lesz:

$$\frac{\theta_1^4(0)}{\theta^4(0)} = \frac{3}{1 - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)}} - 2; \quad \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} = \frac{8(q-4q^4 \pm \dots)}{\theta_1^4(0) \theta(0)}. \quad (12)$$

Az így származó transcendens egyenletben a q változó szerepel mint ismeretlen, melynek kicsinysége folytán a használt sorok igen gyorsan convergálnak és csak itt felírt tagjaik szükségesek.

Előre bocsátva, hogy itt csak az ε_0 -nak megfelelő pozitív gyök kiszámításával kívánunk foglalkozni és minden további discussiotól eltekintünk, ezen feladat megoldására legcélszerűbbnek látszott q kívánt értékét próbálgatás útján fokozatos közelítéssel meghatározni. Ezért 6-jegyű logaritmuskokkal végezve a számítást, a fentebb talált $\alpha = 50^\circ 54' 23''$; $k = 0.77608$ közelítő értékekből kiindulva, lesz az idézett FRÖHLICH-féle táblák szerint:

$$K = 1.9521, \quad K' = 1.7759$$

és (8)-ből:

$$q = 0.05738175$$

ezen értéket a

$$\phi(q) = \frac{\theta_1^4(0)}{\theta^4(0)} - \frac{3}{1 - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)}} + 2$$

egyenletbe helyettesítve lesz:

$$\phi(q) = -0.000042$$

q értékét most 0.001-gyel nagyobbítva a helyettesítés eredménye pozitív, ezen két adatból arányos interpolatioval a következő értékpárt találtuk:

$$q' = 0.05738520; \quad \psi(q) = + 0.000017.$$

A keresett gyök tehát q és q' között fekszik s az előbbi eljárást ismételve az így talált:

$$q'' = 0.0573842$$

véglegesnek tekinthető az ily módon elérhető pontosság mellett, a hátramaradó hiba ugyanis -8×10^{-6} , mi tekintettel ψ 6-ik tizedesének bizonytalanságára elhanyagolható, q'' -ből a (9) egyenlet alapján lesz:

$$(1 - k'^2)^{\frac{1}{2}} = k = \varepsilon_0 = 0.776113 = \sin 50^\circ 54' 21''.5; \quad (13)$$

hol ε_0 utolsó tizedese kissé bizonytalan, ebből végre (10) és (11)-ből

$$K = 1.952118; \quad E = 1.297147 \quad (14)$$

következnek.

Ha most már az ε_0 excentricitású ellipsoid nagy tengelye 1-nek vétetik, a vele egyenlő térfogatú gömb sugara: r_0 nyilván:

$$r_0 = (1 - \varepsilon_0^2)^{\frac{1}{2}} = (\cos \alpha_0)^{\frac{1}{2}}$$

lesz, a megfelelő meridiángörbék teljes ívhosszát pedig s -sel illetőleg s_0 -lal jelölve, az eddigiek alapján

$$\frac{s}{s_0} = \frac{4E}{2\pi r_0}.$$

A számítást a (13) és (14) állandókkal elvégezve lesz:

$$r_0 = 0.857532, \quad s : s_0 = 0.962984.$$

Ha tehát a gömböt állandó térfogat mellett egy ilyen ellipsoiddá alakítjuk át, a meridiángörbe eredeti hosszának 3.7%-ával rövidül meg. A föld esetében tehát a meridián negyedét kerek számban 10^4 km-nek véve, az ívhossz negyedrészének kisebbedése ilyen deformatio következtében 370 km volna.

Báró Harkányi Béla.

ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ALGEBRAI ÉS LOGARITMIKUS SZINGULARITÁSAIRÓL.

(Második közlemény.)

Magasabbrendű logaritmikus pontok az összegezési sokszög oldalain.

13. Minthogy a BOREL-féle összegben az exponenciális függvénynek döntő szerepe van, tehát midőn ezen összeg segélyével tanulmányozzuk a TAYLOR-együtthatók növekedésének s a függvény növekedésének viszonyát, elsősorban célszerű az exponenciális függvény növekedését tanulmányozni. BOREL észrevette,¹ hogy az egész függvények növekedése nem egyforma mértékben függ TAYLOR-soruk összes tagjaitól hanem gyakran egy-két tag dönti el a függvény nagyságrendjének kérdését. A következőkben ennek a gondolatnak továbbfejlesztését adjuk annak kimutatásával, hogy az exponenciális összeg sorából a sor elejéről s a sor végéről bizonyos számú, tehát általában végtelen sok tagot lehet elhagyni a nélkül, hogy ez elhanyagolás a sor növekedésén változtatna. Ily módon *végesszámú tagnak, a sor közepének, vizsgálatával helyettesíthetjük a végtelen sor vizsgálatát s ez esetben ez lényeges egyszerűsítés, mert a növekedés vizsgálatában kettős határérték helyett egyszeres határértéket kell csak vizsgálnunk.*

A logaritmikus pontok vizsgálatához elég kimutatnunk, hogy az

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

¹ BOREL: Leçons sur les séries à termes positifs 58. lap.

függvény növekedését bármely a -ra nézve megadják az $\frac{a}{3}$ indexű tagtól a $3a$ indexű tagig terjedő

$$\frac{a^{\frac{a}{3}}}{\frac{a}{3}!} + \frac{a^{\frac{a}{3}+1}}{\left(\frac{a}{3}+1\right)!} + \dots + \frac{a^{3a-1}}{(3a-1)!} + \frac{a^{3a}}{3a!}$$

tagok, melyeket együtt a sor közepének akarunk nevezni. E tény kimutatására elegendő bebizonyítanunk, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^{\frac{a}{3}}}{\frac{a}{3}!}}{e^a} = 0 \quad (11)$$

és

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{3a}}{3a!} + \frac{a^{3a+1}}{(3a+1)!} + \dots}{e^a} = 0, \quad (12)$$

azaz a sor elejének s a sor végének növekedése alacsonyabbrendű az e^a növekedésénél, az e^a növekedését tehát a középső tagoknak kell megadniok.

14. Egyszerűség kedvéért minthogy az általános esetre szóló bizonyításunkból ki fog tűnni, hogy az $\frac{a}{3} - b = \varepsilon$ valódi tört nem foly be az eredményre, írhatjuk, hogy

$$\frac{a}{3} = b \quad (\text{egész szám}).$$

A sor elejének megbecsülésére tudjuk, hogy

$$1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^b}{b!} < b \frac{a^b}{b!}$$

STIRLING formulája szerint ¹

$$n! = (n+1)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-(n+1)} \cdot \gamma(n),$$

hol $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n)$ véges nem nulla.

¹ Lásd pl. JORDAN: Cours d'Analyse, t. II. 184. lap.

Ennek alkalmazásával

$$b \frac{a^b}{b!} = b \frac{a^b}{(b+1)^{b+\frac{1}{2}} e^{-(b+1)} \cdot \gamma(n)}.$$

Czélszerűen csoportosítva s a (11) értelmében e^a -val osztva, kapjuk, hogy

$$\frac{b \frac{a^b}{b!}}{e^a} = \left(\frac{a}{b+1} \right)^b \cdot \frac{b}{(b+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{-(b+1)+a} \cdot \gamma(n)}$$

s ha e kifejezésről kimutattuk, hogy zérus, annál inkább fennáll a (11) alatti egyenlőség.

Minthogy b -ben fejezve ki az első tényezőt

$$\left(\frac{a}{b+1} \right)^b = \frac{1}{\left(\frac{b+1}{3b} \right)^b} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3} \right)^b \left(1 + \frac{1}{b} \right)^b} \quad \text{és} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b} \right)^b = e,$$

tehát az egész szorzatban a -ra visszatérve

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{a}{3}}}{e^a} \cdot \frac{a}{3} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{3} \cdot \frac{3^{\frac{a}{3}}}{\left(\frac{a+3}{3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2a}{3}}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{3}}{\left(\frac{a+3}{3} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{3^{\frac{1}{3}}}{e^{\frac{2}{3}}} \right)^a = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

minthogy az

$$\frac{1}{3} \log 3 < \frac{2}{3}, \quad \text{azaz} \quad \log 3 < 2$$

egyenlőtlenségekből folyólag

$$3^{\frac{1}{3}} < e^{\frac{2}{3}}.$$

A második tényező tehát exponenciálisan, azaz úgy tart zérus felé a -val, mint egynél kisebb szám a -adik hatványa. Ezzel (11) be van bizonyítva.

Térjünk át a (12) alatti határérték vizsgálatára

$$\frac{a^{3a}}{3a!} + \frac{a^{3a+1}}{(3a+1)!} + \dots < \frac{a^{3a}}{3a!} \left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \dots \right] < \frac{a^{3a}}{3a!} \frac{3}{2}$$

a mint az az $\frac{a^{3a}}{3a!}$ kiemelése után a zárójelben maradt mennyiség megtekintéséből világos.

STIRLING formuláját ismét alkalmazva

$$\frac{1}{e^a} \frac{a^{3a}}{(3a)!} = \frac{a^{3a}}{(3a+1)^{3a+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{-(3a+1)+a} \gamma(3a)}.$$

Az első tényező

$$(3a)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{a}{3a+1} \right]^{3a} < (3a)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} \right)^{3a}$$

s ezt felhasználva

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^a} \frac{a^{3a}}{(3a)!} \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{3^{3a} e^{-2a-1}} = \lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e^2}{3^3} \right)^a = 0, \quad (14)$$

minthogy a

$$2 < 3 \log 3, \text{ azaz } \frac{2}{3} < \log 3$$

egyenlőségek alapján

$$\frac{e^2}{3^3} < 1.$$

Annál inkább áll a (12) alatti határegyenlőség, melynek előzőjével való összevetéséből következik, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{\frac{a}{3}}}{\frac{a}{3}!} + \frac{a^{\frac{a}{3}+1}}{\left(\frac{a}{3} + 1 \right)!} + \dots + \frac{a^{3a}}{(3a)!}}{e^a} = 1, \quad (15)$$

hol $\frac{a}{3}$ és $3a$ indexű tagokat, minthogy e^a -val szemben nem növelik a számlálót, szimmetria kedvéért szintén a számlálóba írtuk. A (15) alatti egyenlőség azt jelenti, hogy e^a növekedését *tényleg sorának közepe dönti el.*

15. Ez eredmény birtokában most hozzáfoghatunk azon magasabbrendű logaritmikus elágazó pontoknak vizsgálatához, melyek az összegezési sokszög határvonalain vannak s melyekben függvényünk

$$f(x) = A \log^q \frac{1}{1-x} + \varphi(x),$$

hol a vizsgálandó pontot az egységpontba helyeztük s a $\varphi(x)$ -ről felteszszük, hogy e pontban csak negatívrendű szingularitása van vagy épen szabályos. Tételünk az elsőrendű logaritmikus pontokra kimondottaknak lesz általánosítása s tartalma az, hogy *bármily egész rendű logaritmikus elágazó pontban az exponenciális összeg úgy nő, mint a logaritmus megfelelő hatványa; q-adrendű logaritmikus pontban tehát*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s(a)}{\log^q a} = A.$$

Minthogy $\varphi(x)$ exponenciális összegéről $s''(a)$ -ról tudjuk, hogy $\varphi(x)$ negatív rendjénél fogva véges, tehát

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s''(a)}{\log a} = 0$$

s így csak a $\log^q \frac{1}{1-x}$ függvény $s'(a)$ exponenciális összegét kell vizsgálnunk.

Az exponenciális összeg sorának elejére és végére vonatkozó (11) és (12) alatti eredményekből következik az is, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{a}{1!} \log 1 + \frac{a^2}{2!} \log 2 + \dots + \frac{\frac{a}{3}}{\frac{3}{3}!} \log \frac{a}{3}}{e^a} = 0, \quad (16)$$

továbbá

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{3a}}{3a!} \log 3a + \frac{a^{3a+1}}{(3a+1)!} \log (3a+1) + \dots}{e^a} = 0, \quad (17)$$

mert az első (16) egyenlőségre elegendő meggondolnunk, hogy a szorzat (13), melynek zérus voltából a (11) alatti határérték zérus voltára következtettünk, jobban tart 0 felé mint egy egynél kisebb szám a -dik hatványa, ezt tehát az egész szorzatnak még $\log \frac{a}{3}$ -mal való szorzása sem akadályozhatja meg, lévén

$$\lim \frac{\frac{a}{3} \log \frac{a}{3}}{\left(\frac{a+3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{2}{3}}}\right)^a = 0$$

s így annál inkább igaz a (16). A második egyenlőségre vonatkozólag pedig tudjuk, hogy az

$$\frac{a^{3a}}{3a!} \log 3a + \frac{a^{3a+1}}{(3a+1)!} \log (3a+1) + \dots$$

sor az első tag elhagyásával így írható

$$\frac{a^{3a+1}}{3a!} \left[\frac{\log (3a+1)}{3a+1} + \frac{a \log (3a+2)}{(3a+1)(3a+2)} + \dots \right],$$

hol a zárójelben levő tagokról könnyű belátni, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\log (3a+1)}{3a+1} + \frac{a \log (3a+2)}{(3a+1)(3a+2)} + \dots &< 1 + \frac{a}{3a+1} + \\ &+ \frac{a^2}{(3a+2)(3a+3)} + \dots < 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

vagyis mint az exponenciális függvény esetében találtuk, a (17) határegyenlőség kiszámítása egy

$$\frac{a^{3a+1}}{3a!} \frac{3}{2}$$

alakú mennyiség vizsgálatára redukálódik, mely a (14) alatt talált exponenciálisan zérus felé tartó mennyiséget csak a -nak egy hatványával szorozza meg s világos, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{e^2}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^a = 0,$$

a mivel annál inkább be van bizonyítva a (17) alatti határ-egyenlőség.

16. Ha tehát az

$$s'(a) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \log^n a}{e^a}$$

exponenciális összeget akarjuk növekedésében megfigyelni, akkor (16) és (17) alapján elegendő a számlálóban levő sor közepének, az

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{a}{3}}}{\frac{a}{3}!} \log^q \frac{a}{3} + \frac{a^{\frac{a}{3}+1}}{\left(\frac{a}{3}+1\right)!} \log^q \left(\frac{a}{3}+1\right) + \dots + \\ + \frac{a^a}{a!} \log^q a + \dots + \frac{a^{3a}}{3a!} \log^q 3a \end{aligned}$$

kifejezésnek növekedését eldönteni.

E kifejezés helyett a nálánál nagyobb

$$\log^q 3a \left[\frac{a^{\frac{a}{3}}}{\frac{a}{3}!} + \dots + \frac{a^{3a}}{3a!} \right]$$

és a nála kisebb

$$\log^q \frac{a}{3} \left[\frac{a^{\frac{a}{3}}}{\frac{a}{3}!} + \dots + \frac{a^{3a}}{3a!} \right]$$

kifejezéseket vizsgáljuk, melyekről — a zárójelben levő mennyiséget $Q(a)$ -nak nevezve — azonnal belátjuk, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{Q(a) [\log a \pm \log 3]^q}{e^a \log^q a} = 1$$

tekintettel a (15) egyenlőségre s arra, hogy a számlálóban levő kéttagú mennyiség q -adik hatványában csak egyetlen $\log^q a$ tag van és $\log a$ többi hatványai q -nál kisebbek. Ebből következik, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s'(a)}{\log^q a} = 1$$

s $\varphi(x)$ negatívrendű lévén, egyszersmind

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s(a)}{\log^q a} = \lim_{a \rightarrow \infty} A \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \log^q n}{e^a \log^q a} = A$$

és ezzel tételünk be van bizonyítva. Az *exponenciális összeg tehát tetszőleges q -adrendű logaritmikus pontban is elárulja a függvény viselkedését.* Ezt az eredményt, mint az elsőrendű logaritmikus elágazó pontokra nyertekkel tettük volt, kombinálva a pólusokra vonatkozó eredményekkel, ezzel *tetszőleges rendű logaritmikus ponttal kombinált tetszőleges rendű pólusban meg tudjuk vizsgálni a függvény viselkedését.* Hogy a (B) vagy a mi egyértékű, a (B_1) alatti függvényalak tárgyalását teljesen kimerítsük, most még a logaritmikus algebrai pontok vizsgálatára kell kiterjeszkednünk.

Logaritmikusi algebra pontok az összegezési sokszög oldalain.

17. Az algebrai pontok vizsgálata szükségessé teszi az exponenciális függvényre vonatkozólag végezett megfontolásaink általánosítását. Be fogjuk bizonyítani bármilyen $k > 1$ számra vonatkozólag, hogy az exponenciális összegnek

$$\frac{a}{k} - \theta = b \quad (\text{egész szám})$$

indexű tagot megelőző s az

$$ak - \vartheta = \beta \quad (\text{egész szám})$$

indexű tagot követő tagjai nem folynak be a sor növekedésére. Minthogy k általában nem egész szám, az $\frac{a}{k}$ és ak mennyiségekben foglalt legnagyobb egész számokat b és β számot

kell a kizárt tagok index-határául választanunk s így a fenti különbségekben θ és ϑ valódi törtek.

Oszzuk három részre az e^a függvény TAYLOR-sorát s nevezzük el e három részt így

$$A(a) = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^b}{b!},$$

$$C(a) = \frac{a^{b+1}}{(b+1)!} + \cdots + \frac{a^{\beta-1}}{(\beta-1)!},$$

$$B(a) = \frac{a^\beta}{\beta!} + \frac{a^{\beta+1}}{(\beta+1)!} + \cdots$$

Minthogy e^a sorában a tagok az $a-1$ -dik tagig nőnek és $b > a-1$, tehát,

$$A(a) < b \frac{a^b}{b!}.$$

Ebben az egyenlőtlenségben felhasználjuk STIRLING

$$b! = \gamma(b) (b+1)^{b+\frac{1}{2}} e^{-(b+1)}$$

formuláját, hol

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \gamma(b) = \sqrt{2\pi}$$

és e^a -val osztunk, akkor

$$\frac{A(a)}{e^a} < \frac{ba^b}{\gamma(b) (b+1)^{b+\frac{1}{2}} e^{-(b+1)+a}},$$

a hol a számlálóban az a szám helyett a nálánál nagyobb $k(b+1)$ értéket s az e szám kitevőjébe $b = \frac{a}{k} - \theta$ számot behelyettesítve

$$\frac{A(a)}{e^a} < \frac{bk^b}{\gamma(b) (b+1)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{a}{k} - \theta + 1\right) + a}}.$$

Ha a -val, illetve b -vel elég messze megyünk, e viszonynak zérus felé kell tartania, mert $\gamma(b)$ végessé válik, e^θ véges szám s ha

$$\frac{\frac{a}{k^k}}{e^{\frac{a}{k}(k-1)}} \quad (18)$$

zérus felé tart, akkor a mellette levő $b^{\frac{1}{k}}$ tényező ezen a tényen már nem változtathat. A (18) pedig zérus felé tart, mert

$$\frac{k}{e^{k-1}} < 1,$$

mi az e^{k-1} függvény TAYLOR-sorának megtekintéséből közvetlenül világos. Vizsgálat alatt álló egyenlőtlenségünk tehát így írható

$$\frac{A(a)}{e^a} < a\phi(a)c^a,$$

hol

$$c = \frac{\frac{1}{k^{\frac{1}{k}}}}{e^{\frac{k-1}{k}}}$$

és

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup \phi(a) = \text{véges szám.}$$

Tehát bármilyen r értéket válaszszunk is,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^r A(a)}{e^a} = 0, \quad (19)$$

vagyis az e^a függvény sorának első b számú tagja e függvény növekedésére nézve közömbös.

18. Ugyanígy kimutatható, hogy ugyanez áll a sornak

$$B(a) = \frac{a^\beta}{\beta!} \left[1 + \frac{a}{\beta+1} + \frac{a}{\beta+1} \cdot \frac{a}{\beta+2} + \dots \right]$$

részére is, hol

$$ak = \beta + \vartheta$$

és ϑ valódi tört, tehát $ak < \beta + 1$ s így

$$\frac{a}{\beta+i} < \frac{1}{k}.$$

Ebből

$$B(a) < \frac{a^\beta}{\beta!} \frac{k}{k-1}.$$

A STIRLING formulát újból alkalmazzuk és nagyítunk azzal, hogy $\frac{\beta+1}{k}$ értéket írunk az a szám helyébe, akkor

$$\frac{B(a)}{e^a} < \frac{k}{k-1} \frac{1}{\eta(\beta)(\beta+1)^{\frac{1}{2}} k^{\beta} e^{-(ak-\beta+1)+a}}.$$

A jobboldalon levő mennyiség növekedését az előző esetben alkalmazott meggondolásokkal azonos módon az

$$\frac{e^{a(k-1)}}{k^{ak}}$$

kifejezés dönti el, s ez zérus felé tart, ha a -dik gyöke

$$\frac{e^{k-1}}{k^k} < 1.$$

Ez pedig igaz, mert az

$$e^{k-1} < k^k$$

egyenlőtlenség fennállásához szükséges és elégséges, hogy logaritmusaik is ily nagyságviszonyban legyenek, azaz legyen

$$k-1 < k \log k.$$

Ha azonban meggondoljuk, hogy a $k=1$ pontban mindkét oldal zérussá válik, a $k=e$ pontban s azon túl kivánt egyenlőtlenségünk már igaz, akkor látjuk, hogy az egyenlőtlenségnek minden $k>1$ értékre vonatkozólag igaznak kell lennie. Ellenkező esetben a két függvény különbsége

$$k \log k - (k-1)$$

differenciálhányadosának, $\log k$ -nak volna 1-nél nagyobb gyöke s ez abszurdum. Tehát

$$\frac{e^{k-1}}{k^k} = c < 1,$$

azaz, mint az előbbi esetben a sor elejére vonatkozólag ki-mondottuk, a sor végére nézve is igaz, hogy tetszőleges r -et véve

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^r B(a)}{e^a} = 0, \quad (20)$$

vagyis e^a növekedésére sorának vége $B(a)$ sincs befolyással. Marad tehát, hogy a növekedést a sornak $\beta - b$ tagból álló közepe határozza meg, azaz

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{C(a)}{e^a} = 1. \quad (21)$$

19. Ezek alapján bizonyítsuk be a következő tételt.

Adva lévén az

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n) a^n}{n!} \quad (22)$$

egész függvény, hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^p \log^q n} = \alpha,$$

hol q egész és p tetszőleges valós szám, behatározzuk, hogy $f(a)$ nagyságrendjét a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^p \log^q a e^a} = \alpha$$

összefüggés határozza meg. Ugyanis

$$\varphi(n) = \alpha n^p \log^q n + \varepsilon_n n^p \log^q n,$$

hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Minthogy CESÀRO tétele értelmében

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n n^p \log^q n \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=1}^{\infty} n^p \log^q n \frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

elegető a kívánt nagyságrend megállapítása céljából az

$$f_1(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \log^q n a^n}{n!}$$

nagyságrendjét megvizsgálunk. Ebben az exponenciális függvény növekedésére vonatkozó eredményeinket fogjuk kihasználni és bebizonyítjuk, hogy az $f_1(a)$ függvény növekedésére sem folynak be az

$$\frac{a}{k} - \theta = b$$

indexű tagot megelőző tagok, azaz a sor eleje és az

$$ak - \theta = \beta$$

indexű tagot követő tagok, vagyis a sor vége.

Az $f_1(a)$ sorának megfelelő részeit $A'(a)$, $B'(a)$ és $C'(a)$ -val jelöljük. Az $A'(a)$ rész végesszámú tagjai legfeljebb oly nagyok, mint a

$$b^{|p|} \log^q b \frac{a^b}{b!}$$

kifejezés, tehát

$$A'(a) < b^{|p|} \log^q b A(a)$$

és így a (19) alapján már

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{A'(a)}{e^a} = 0.$$

20. Ugyanily eredményre vezet $B'(a)$ vizsgálata, melynek indexei β -val kezdődnek.

$$B'(a) = \frac{a^\beta}{\beta!} \left[\beta^p \log^q \beta + (\beta+1)^p \log^q (\beta+1) \frac{a}{\beta+1} + \dots \right].$$

Legyen μ egy $|p|$ -nél nagyobb egész szám és hanyagoljuk el $B'(a)$ első 4μ tagját. Ezt megtehetjük, mert e^a sorának, a sor végéről vett, végesszámú tagjai e^a -val osztva úgy tartanak 0 felé, mint 1-nél kisebb szám a -adik hatványa. Vizsgáljuk a zárójelben levő 4μ -nél nagyobb indexű tagokat. A $4\mu+1$ -ik tag kisebb, mint

$$\frac{a^{4\mu} (\beta+4\mu)^\mu \log^q (\beta+4\mu)}{(\beta+1) \dots (\beta+2\mu) \dots (\beta+4\mu)}.$$

Minthogy $r \geq 2\mu$ esetben

$$\beta+2\mu+r < (\beta+r)^2,$$

tehát

$$\frac{\beta+4\mu}{(\beta+2\mu+r)(\beta+2\mu+r-1)} < 1$$

mihelyt $r \geq 1$, tehát

$$\frac{(\beta+4\mu)^\mu}{(\beta+2\mu+1) \dots (\beta+4\mu)} < 1,$$

valamint

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\log^q(\beta+4\mu)}{\beta+2\mu} = 0,$$

tehát

$$B'(a) < P_{4\mu}(a) + \frac{a^{\beta+4\mu}}{(\beta+2\mu-1)!} \left[1 + \frac{a}{\beta+2\mu} + \frac{a}{\beta+2\mu} \cdot \frac{a}{\beta+2\mu+1} + \dots \right]$$

s így

$$B'(a) < P_{4\mu}(a) + \frac{a^{\beta+4\mu}}{(\beta+2\mu-1)!} \frac{k}{k-1},$$

a hol

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{P_{4\mu}(a)}{e^a} = 0$$

és

$$\frac{a^{\beta+4\mu}}{(\beta+2\mu-1)!} < \frac{a^{2\mu+1}a^\beta}{\beta!},$$

következően

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{B'(a)}{e^a} = 0.$$

Az

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \log^q n \cdot \frac{a^n}{n!}$$

függvény nagyságrendjét, tehát megadják sorának azon tagjai, melyeknek indexei $\frac{a}{k}$ és ak közé esnek.

Ugyanis, ha $p \geq 0$,

$$\left(\frac{a}{k}\right)^p \log^q \left(\frac{a}{k}\right) C(a) < C'(a) < (ak)^p \log^q(ak) C(a).$$

Tehát

$$\begin{aligned} \limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{f_1(a)}{a^p \log^q a e^a} &= \limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{A'(a) + B'(a) + C'(a)}{a^p \log^q a e^a} \leq \\ &\leq \limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{(ak)^p (\log a - \log k)^q C(a)}{a^p \log^q a e^a} = k^p \end{aligned}$$

és

$$\liminf_{a=\infty} \frac{f_1(a)}{a^p \log^q a \cdot e^a} = \liminf_{a=\infty} \frac{A'(a) + B'(a) + C'(a)}{e^a} > \frac{1}{k^p},$$

mert

$$\lim_{a=\infty} \frac{C(a)}{e^a} = \lim_{a=\infty} \frac{e^a - A(a) - B(a)}{e^a} = 1.$$

Ha $p < 0$, a felső határ alsó határrá válik és viszont. Látjuk, hogy a

$$\lim_{a=\infty} \frac{f_1(a)}{a^p e^a \log^q a}$$

sorozat határpontjai $\frac{1}{k^p}$ és k^p között vannak. Ily határpont azonban csak egy lehet s ez maga az egység, mert k -val az egységet tetszőlegesen megközelíthetem; ugyanis föltéve, hogy volna egy $x_0 \neq 1$ határpont, mindég vehetném a

$$|k-1| < \varepsilon$$

különbséget elég kicsinyre ahhoz, hogy fennálljon a következő két egyenlőtlenség:

$$\left| 1 - \frac{1}{k^p} \right| < |1 - x_0|,$$

$$|k^p - 1| < |1 - x_0|,$$

s ekkor x_0 nem lévén $\frac{1}{k^p}$ és k^p között, nem lehet a sorozat határpontja. Tehát

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^p \log^q n \cdot \frac{a^n}{n!}}{a^p \log^q a \cdot e^a} = 1. \quad (24)$$

21. Ebből az eredményből, melyet a logaritmikus algebrai pontok vizsgálatára akarunk felhasználni, előbb egy elég érdekes következtetést vonunk le az

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}$$

függvény indetermináció-határaitra vonatkozólag.

Ha $\varphi(n)$ -re nézve a határok ω_0 és ω_1 , azaz, ha egy bizonyos indextől kezdve

$$n^{\omega_0 - \varepsilon} < \varphi(n) < n^{\omega_1 + \varepsilon}, \quad (25)$$

hol ε tetszőleges kicsiny, akkor

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_1 + \varepsilon} e^a} = 0 \quad (26)$$

és

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_0 - \varepsilon} e^a} = \infty. \quad (27)$$

Ugyanis (25)-ből már

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\omega_1 + \varepsilon}} = 0$$

és CESÀRO tételét a következő két függvényre alkalmazva

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!},$$

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega_1 + \varepsilon} \frac{a^n}{n!}$$

nyerjük, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{f_1(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\omega_1 + \varepsilon}} = 0.$$

Másrészt az iménti eredményünk szerint

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f_1(a)}{a^{\omega_1 + \varepsilon} e^a} = 1,$$

tehát az első egyenlőség (26) igaz.

A második is igaz, mert ugyanígy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{n^{\omega_0 - \varepsilon}}{\varphi(n)} = 0$$

és CESARO tétele szerint

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega_0 - \varepsilon} \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}} = 0$$

és

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega-\varepsilon} \frac{a^n}{n!}}{a^{\omega-\varepsilon} e^a} = 1,$$

a miből

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_0-\varepsilon} e^a} = \infty.$$

S ez azt jelenti, hogy $\varphi(n)$ határozatlansági intervalluma $f(a)$ határozatlansági intervallumának is mértéke.

Ha $\omega_0 = \omega_1 = \omega$, azaz, ha $\varphi(n)$ növekedése szabályos, akkor φ függvény határozatlansági intervalluma zérus,

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^{\omega+\varepsilon} e^a} = 0,$$

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^{\omega-\varepsilon} e^a} = \infty$$

s ilyenkor a függvény növekedését mérő nagyságrend annyi, mint ω és az e^a függvény nagyságrendjének összege.

Ugyanez a gondolatmenet általánosabb esetekben is egész precíz eredményeket ad. Például, ha

$$n^{\omega_0-\varepsilon} (\log n)^{q_0-\varepsilon} < \varphi(n) < n^{\omega_1+\varepsilon} (\log n)^{q_1+\varepsilon},$$

hol ε tetszőleges kicsiny, akkor az

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}$$

függvény növekedését ugyanazon ω_0 , q_0 , ω_1 , q_1 számok, azaz a következő egyenlőtlenség jellemzi

$$e^a a^{\omega_0-\varepsilon} (\log a)^{q_0-\varepsilon} < f(a) < e^a a^{\omega_1+\varepsilon} (\log a)^{q_1+\varepsilon}.$$

22. Használjuk fel most az imént találtakat a logaritmikus algebrai pontok vizsgálatára, hogy ezzel kimerítsük a (B) alatti alak tanulmányozását. Tárgyalandó esetünkben

$$f(x) = \sum c_n x^n = \frac{A_q \log^q \frac{1}{1-x}}{(1-x)^k} + \varphi(x).$$

hol k tetszőleges pozitív valós szám és $\varphi(x)$ rendje az 1 pontban, melyet vizsgálunk, $k_1 < k$.

Ez esetben a fentiekből következik, hogy a $\varphi(a)$ exponenciális összege, $s''(a)$ úgy nő, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s''(a)}{a^k} = 0.$$

Vizsgáljuk meg most a

$$\frac{\log^q \frac{1}{1-x}}{(1-x)^k}$$

függvény exponenciális összegét, mit $s'(a)$ -val jelölünk.

Mint ahogy (8) alapján a CESÀRO-féle összehasonlítást ismét felhasználva, e függvény exponenciális összege $s'(a)$ úgy nő, mint

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^k \log^q n \frac{a^n}{n!}}{e^a \Gamma(k+1)},$$

(24) szerint

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s'(a)}{a^k \log^q a} = \frac{1}{\Gamma(k+1)}$$

és így $f(a)$ exponenciális összegére, $s(a)$ -ra nézve

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s'(a)}{a^k \log^q a} = \frac{A}{\Gamma(k+1)} \quad (28)$$

összefüggés áll fenn, mely a *logaritmikus pólusokra kimon-
dott tételünknek logaritmikus algebrai pontokra való általánosí-
tása. Az exponenciális összeg tehát a logaritmikus algebrai
pontokban is elárulja a függvény növekedését. Ez eredményt
az első (B) alatti összetettebb formulára alkalmazva, a mivel
csak kisebb növekedésű exponenciális összegeket adtunk le
véges számban az előbbihez, ezen (B) formulát minden pozitív
egész q és minden valós k értékre nézve megvizsgálnak tekint-
hetjük.*

23. Ezzel az összegezési sokszög oldalain levő logaritmikus pontokat, logaritmikus pólusokat és logaritmikus algebrai pontokat teljesen megvizsgáltuk. Ezek az eredmények mind kiterjeszthetők a BOREL-féle általánosított exponenciális összegre is, melynek alakja

$$s^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_r n \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

hol összegezési függvényül e^a helyett e^{ar} függvényt használjuk. Ez az összeg az egyszerű exponenciális összeg összegezési sokszögénél nagyobb területen egy görbe vonalakkal határolt tartományban¹ adja meg a függvény viselkedését s e tartomány határvonalán levő szinguláris pontokban is jellemzi a függvényt. E szinguláris pontoknak, hogy e módszerrel vizsgálhatók legyenek e határvonal oly pontjára kell esniök, hogy a szinguláris rész levonása után maradó $\varphi(x)$ függvénynek az a pont már szabályos pontja legyen, azaz összegezési tartományába beleessék. Az általánosított exponenciális összeg e tartománya r növelésével növekedik s bizonyos esetekben, mint BOREL kimutatja,² az egész sík minden véges helyén megvizsgálható vele az általa ábrázolt függvény. Ha ugyanis a függvény végesben levő szinguláris pontjai mind izoláltak, akkor e módszer elég nagy r érték választásával megadja ez izolált szingularitások bármelyikéhez tetszőlegesen közel eső függvényértékeket s így eredményeinknek ez általánosított exponenciális összegre való kiterjesztése jelentékenyen növeli általánosságukat.

Ha ismét

$$f(x) = A \frac{\log \frac{1}{1-x}}{(1-x)^k} + \varphi(x) + \psi(x),$$

¹ BOREL: Leçons sur les séries divergentes. Chapitre IV.

² BOREL id. mű 134. lap.

hol a

$$\varphi(x) = \sum b_n x^n$$

függvény rendje k -nál kisebb s a vizsgált egységpont már reguláris pontja a $\phi(x)$ függvénynek és az r -edrendű összegezési tartomány belsejébe esik. Tehát $\phi(x)$ r -edrendű exponenciális összege

$$\lim_{a \rightarrow \infty} s_{\psi}^{(r)}(a) = \phi(1).$$

Másrészt $\varphi(x)$ exponenciális összegét $s_{\varphi}^{(r)}(a)$ -val jelölve

$$s_{\varphi}^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{(\varphi)} \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

hol

$$s_{rn}^{(\varphi)} = b_0 + b_1 x + \dots + b_i x^i + \dots + b_{rn} x^{rn}$$

a $\varphi(x)$ rn -edik részletösszege s erről a 10. §. szerint tudjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{rn}^{(\varphi)}}{n^k} = 0$$

s így

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s_{\varphi}^{(r)}(a)}{a^{rk}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{(\varphi)} \frac{b^n}{n!}}{b^k e^b} = 0,$$

hol $a^r = b$ behelyettesítést végeztünk.

Hátra van a szinguláris rész exponenciális összegének $s'^{(r)}(a)$ -nak vizsgálata. Ismét (8)-ból tudjuk, hogy a növekedés szempontjából írhatjuk

$$s'^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (rn)^k \log^q rn \cdot \frac{a^{rn}}{n!}}{\Gamma(k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!}}$$

s így hivatkozva (24)-re

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s'^{(r)}(a)}{a^{rk} \log^q a} = \frac{r^{k+q}}{\Gamma(k+1)},$$

így tehát tekintettel arra, hogy az $f(x)$ exponenciális összege

$$s^{(r)}(a) = As'^{(r)}(a) + s_q^{(r)}(a) + s_\psi^{(r)}(a)$$

nyerjük a keresett tételt

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{s^{(r)}(a)}{r^{k+q} a^{rk} \log^q a} = \frac{A}{\Gamma(k+1)}.$$

Tehát BOREL általánosított exponenciális összegei az e^a függvény r -jével együtt nagyobbodó területen teszik lehetségessé az általunk tanulmányozott szinguláris pontok vizsgálatát.

A következőkben az analitikai függvények legáltalánosabb ábrázolás-módjának segélyével, a MITTAG-LEFFLER-féle polinóm-soros vagy egész-függvényes ábrázolásnak segítségével fogjuk tanulmányozni az analitikai függvény szingularitásait.

II. RÉSZ.

Szingularitások a csillagtartomány határán.

Pólusok.

24. Az analitikai függvény legáltalánosabb ábrázolása az, mely polinómok vagy egész függvények sorozatának határértéke gyanánt állítja elő a függvényt. Ez a már napjainkban klasszikussá vált ábrázolási mód MITTAG-LEFFLERTől ered és megadja a függvény értékét a csillagtartomány minden belső pontjában. Ez polinóm-soros vagy egész-függvényes ábrázolásnak segítségével a szinguláris pontok tanulmányozását, legalább elvben, lehetségesnek kell gondolnunk, mert egyrészt ez ábrázolás a csillagtartományból kizárt félegyeneselek kezdőpontjában levő szingularitások tetszőleges kis környezetében, minden szabályos pontban megadja a függvény értékét, továbbá a megközelítő $F(a, x)$ egész függvények maguk regulárisak az egész komplex sík minden pontjában. A problémát a szinguláris pontok vizsgálatára ilyformán tűztük ki.¹

¹ P. DIENES: Essai etc. § XI.

A csillagtartomány belsejében levő bármely x_0 pontban MITTAG-LEFFLER tétele szerint

$$\lim_{a=\infty} F(a, x_0) = f(x_0).$$

Ha x_0 valamely kizárt félegyenes kezdőpontjában levő szinguláris pontja az $f(x)$ függvénynek, akkor a következő probléma merül föl.

Mily összefüggés áll fenn a

$$\lim_{a=\infty} F(a, x_0) \quad (29)$$

sorozat s az x_0 pontban levő szingularitás szerkezete között?

A következőkben e kérdésnek megoldását adjuk pólusokra, logaritmikus pontokra, algebrai pontokra s ezek kombinációira vonatkozólag és egy alkalmas összegezési függvény választásával e problémának a kitűzött pontosság mellett a legáltalánosabb megoldásáig jutunk el. A pólusokra vonatkozólag nyert eredmények már francia nyelven megjelentek ugyan a Journal de Mathématiques 1909. évfolyamában, azonban teljesség kedvéért a következőkben magyarul is közöljük őket.

25. Bevezetésül jegyezzük meg, hogy ha x_0 negatívrendű szinguláris pont, akkor

$$\lim_{a=\infty} F(a, x_0) = \lim_{x=x_0} f(x)$$

s ez bizonyos értelemben ABEL egy tételének a csillagtartományra való kiterjesztése.¹

Tegyük fel most, hogy az x_0 pontban függvényünknek pólusa van. Vajjon lehetséges-e egy határozott ábrázolásmód megválasztásával felkutatnunk a (29) sorozat növekedésének s a függvény x_0 pontban való növekedésének viszonyát s vajjon e viszony meghatározza-e itt is a főrészt együtthatóit, azaz jellemzi-e teljesen a szingularitást?

¹ P. DIENES: Essai § VII. és DIENES PÁL: Analitikai függvények negatívrendű szinguláris helyeinek vizsgálata. Math. és Term. Értesítő. 1909.

Látni fogjuk, hogy e kérdésre igenlő választ kapunk.

Az ábrázolásmód megválasztása czéljából röviden vázoljuk az analitikai függvénynek egész függvények sorozatával történő értelmezését, úgy mint azt MITTAG-LEFFLER adja már idézett nagy értekezésében. Legyen

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

oly egész függvény, mely eleget tesz a következő két föltételnek:

1. $E(x)$ határértéke 0, mikor x a végtelen felé tart bármily $0-\infty$ vektoron kivéve a pozitív valós tengelyt, ellenben $E(x)$ határértéke pozitív és a végtelen felé tart, mikor x a pozitív valós tengelyen tart a végtelen felé.

2. Ha ω pozitív szám, akkor

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega x)}{E(\omega)} = 0$$

és ezenkívül e sorozat egyenletesen tart a zérus felé, míg x a valós tengely $x=1$ értéktől a végtelenig terjedő részén kívül eső tartományban fekszik.

Legyen $fA(x)$ az $f(x)$ függvény azon ága, melyet az

$$fA(x) = \sum a_n x^n$$

egyenlőség határoz meg az összetartási körben s mindenütt, a hova analitikai folytatással eljuthatunk, tehát a csillagtartományban is.

Legyen

$$s_n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

MITTAG-LEFFLER tétele szerint

$$fA(x) = \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n a_n a^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n} = \lim_{a=\infty} M(a)$$

s ez az eredmény a BOREL-féle exponenciális módszer általánosításának tekinthető, mert szerkezete ugyanolyan, mint az

exponenciális összegé, csupán összegezési függvényül benne e^a helyett $E(a)$ függvény szerepel.

26. Az $E(a)$ számára kiszabott föltételeknek megfelelő függvényül az

$$E_\beta(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a}{\log(n+\beta)} \right]^n \quad \beta > 1$$

függvényt választjuk majd, melyet LINDELÖF tanulmányozott. Behbizonyítjuk azonban általában, hogy minden $E(a)$ egész függvény, melynek együtthatói pozitívok és mely a $\frac{1}{a}$ -val egyenletesen tart zérus felé az

$$\varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon \quad (30)$$

szögben bármily kicsiny legyen is ε , mindég eleget tesz a második föltételnek. (Hogy az elsőnek eleget tesz, az evidens.)

Adjunk meg egy véges A tartományt, melynek nincs közös pontja az x tengely $+1$ -től ∞ -ig terjedő részével. Mindég lehet oly egynél nagyobb sugarú kört rajzolni, hogy az egész A tartomány e kör belsejében maradjon. Vegyük körül a pozitív valós tengely kizárt félegyenesét egy elég keskeny $ACA'BDB'$ sávval úgy, hogy A tartomány e sávon kívül essék. Osszszuk két részre az A tartományt, A_1 része az AOB szögön kívül, a másik része A_2 az $A'OB'$ szögön belül essék.

Föltevésünk szerint, ha (30) egyenlőtlenségben szereplő ε szöveget AOB -nél kisebbre választjuk, akkor

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} E(\omega x) = 0$$

és $E(\omega x)$ egyenletesen tart határa felé, ha x A_1 -ben van, mert mikor x az AOB szögben van, ωx is ott van. Annál inkább zérus felé tart az

$$\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$$

viszony szintén egyenletesen, mikor $\omega = +\infty$, s ez így áll minden oly véges tartományból, például A_1 -ből vett x értékekre, mely az AOB szögön kívül esik.

Vizsgáljuk most az A_2 tartományt, vagyis A -nak azt a részét, mely az AOB szög $A'B'$ ívig terjedő részével azonos.

Ez A_2 tartományban x legnagyobb abszolút értéke A' -nak (vagy B' -nek) abszolút értéke úgy, hogy e tartományban

$$|x| < \overline{OA'} = b < 1$$

s így $E(x)$ együtthatói pozitívok lévén

$$|E(\omega x)| < E(\omega b),$$

vagy bármely az A_2 tartományból vett x értékre

$$\frac{|E(\omega x)|}{E(\omega)} < \frac{E(\omega b)}{E(\omega)}.$$

Alkalmazzuk most CESÀRONAK az egész függvényekre általánosított tételét az

$$E(\omega b) = \sum a_n b^n \omega^n$$

és

$$E(\omega) = \sum a_n \omega^n$$

függvényekre, akkor

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega b)}{E(\omega)} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n b^n}{a_n} = 0,$$

mert $b < 1$. Tehát

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega x)}{E(\omega)} = 0$$

az egész $A'OB'$ tartományban.

Az $E(a)$ függvény tehát teljesíti a kívánt föltételt s így szolgálhat összegezési függvényül a MITTAG-LEFFLER-féle ábrázolásban.

LINDELÖF bebizonyította, hogy a 4. §-ban már említett $E_\beta(a)$ egész függvény egyenletesen tart zérus felé minden oly szögtartományban, mely a (30) föltételnek eleget tesz. Ebből folyólag a fenti okoskodás alapján ez az egész függvény valóban használható összegezési függvény gyanánt. Ez biztosít bennünket arról, hogy az okoskodásban kitűzött követelmények nem mondanak ellent egymásnak, azaz vannak oly egész függvények, melyek mindama föltételeknek eleget tesznek.

27. Tegyük fel most, hogy x_0 k -adrendű pólus s az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

függvény csillagtartományból kizárt valamelyik félegyenes kezdő-pontjában van. Függvényünket a csillagtartományban

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) a_n a^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n} = \lim_{a \rightarrow \infty} M(a)$$

kifejezés ábrázolja.

Föltevésünk szerint az

$$\varphi(x) = f(x) - \left[\frac{A_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k} + \dots + \frac{A_1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right] = \sum b_n x^n$$

különbség már holomorf x_0 -ban és csillagtartománya x_0 helyet már magában foglalja. Tehát, ha

$$s'_n = b_0 + b_1 x_0 + \dots + b_n x_0^n,$$

akkor

$$\lim_{a \rightarrow \infty} M'(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum s'_n a_n a^n}{\sum a_n a^n} = \varphi(x_0). \quad (31)$$

Számítsuk ki most az

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k}$$

függvényre képezett $M_k(a)$ összeget.

Ez utóbbi, definíciója szerint, egyenlő a

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \dots (n+1) a_n a^n}{k! \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n} = \frac{\frac{d^k}{da^k} [a^k E(a)]}{k! E(a)}$$

kifejezéssel.

Végezzük el a differenciálást. A tagok ilyenek lesznek

$$d_i a^{k-i} E^{(k-i)}(a).$$

$$i=0, 1, \dots, k$$

Ezek között legnagyobb az a tag, hol $i=0$. Ugyanis

$$E^{(k-1)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-i)(n+k-i-1) \dots (n+1) a_{n+k-i} a^n,$$

azaz

$$a^{(k-1)} E^{(k-i)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-i) \dots (n+1) a_{n+k-i} a^{n+k-i} =$$

$$= \sum_{n=-i}^{\infty} (n+k) \dots (n+i+1) a_{n+k} a^{n+k}.$$

Másrészt

$$a^k E^{(k)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) \dots (n+1) a_{n+k} a^{n+k}$$

úgy, hogy CESÀRO tétele szerint

$$\lim_{a=\infty} \frac{a^{k-i} E^{(k-i)}(a)}{a^k E^{(k)}(a)} = \lim_{n=\infty} \frac{(n+k) \dots (n+i+1) a_{n+k}}{(n+k) \dots (n+i+1) \dots (n+1) a_{n+k}} = 0.$$

Mint hogy $d_0=1$, írhatjuk, hogy

$$\frac{d^k}{da^k} [a^k E(a)] = a^k E^{(k)}(a) [1 + \varepsilon_k(a)],$$

hol

$$\lim_{a=\infty} \varepsilon_k(a) = 0.$$

Ha most a (31) egyenlőséget kiírjuk,

$$\lim_{a=\infty} M'(a) = \lim_{a=\infty} [M(a) - A_k M_k(a) - \dots - A_1 M_1(a)] = \varphi(x_0)$$

a hova értékeiket behelyettesítve kapjuk,

$$\lim_{a=\infty} \left\{ M(a) - \left[\frac{A_k a^k E^{(k)}(a)}{k! E(a)} + \frac{A_{k-1} a^{k-1} E^{(k-1)}(a)}{(k-1)! E(a)} + \dots \right. \right.$$

$$\left. \left. \dots + \frac{A_1 a E^{(1)}(a)}{1! E(a)} + \eta(a) \right] \right\} \varphi(x_0),$$

hol

$$\lim_{a=\infty} \eta(a) = 0.$$

De az előbbi okoskodás szerint

$$\frac{A_k a^k E^{(k)}(a)}{k!} + \frac{A_{k-1} a^{k-1} E^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} + \dots + \frac{A_1 a E^{(1)}(a)}{1!} =$$

$$+ \frac{A_k a^k E^{(k)}(a)}{k!} [1 + \eta_1(a)],$$

hol ismét

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \eta_1(a) = 0,$$

azaz

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ M(a) - \frac{A_k a^k E^{(k)}(a)}{k! E(a)} [1 + \varepsilon(a)] \right\} = \varphi(x_0) \quad (32)$$

és könnyű belátni, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^k E^{(k)}(a)}{E(a)} = +\infty.$$

Írjuk végül, hogy

$$\frac{E^{(k)}(a)}{E(a)} = f_k(a),$$

hol $f_k(a)$ függvényeket tisztán az $E(a)$ összegező függvény határozza meg és oszszuk a (32) egyenlőség mindkét oldalát $a^k f_k(a)$ -val. A jobboldal $a \rightarrow \infty$ esetben zérus felé tart s így

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{M(a)}{a^k f_k(a)} = \frac{A_k}{k!}. \quad (33)$$

Ez az általános összefüggés áll fenn a MITTAG-LEFFLER-féle összegek és a függvény pólusai között. Ez összegeket a TAYLOR-sor a_n együtthatói határozzák meg s így a (33) egyenlőség az együtthatók és a pólusok általános összefüggését adja meg.

Minthogy $M(a)$ az $F(a, x)$ egész függvényeknek $a \rightarrow \infty$ értékre vett határértéke, s az $F(a, x)$ függvények tetszőlegesen megközelítik az $f(x)$ függvényt az egész csillagtartományban, a (33) összefüggés így is írható

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{F(a, x_0)}{a^k f_k(a)} = \frac{A_k}{k!},$$

tehát a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F(a, x_0)$$

sorozat valamely x_0 pólusban közvetlen összefüggésben áll a szingularitás természetével. Megmutatja a pólus rendjét és

meghatározza egymásután a főrészt A_k együtthatóit, azaz teljesen jellemzi a szóban forgó szingularitást.

Ha összegező függvényül a LINDELÖF-féle $E_\beta(a)$ függvényt választjuk, akkor

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f_k(a) = \infty,$$

tehát a (29) sorozat végtelenségi rendje meghatározza, de meg is haladja a függvény végtelenségét, mert x_0 pontban a függvény k -adrendben válik végtelenné.

Dienes Valéria és Dienes Pál.

A LANTHÁN ÉS A KOBALT SPEKTRÁLVONALAINAK ZEEMAN EFFEKTUSÁRÓL.

(Második és befejező közlemény.)

Kísérleti eljárás.

Mindazok, a miket eddig részletesen tárgyaltunk, magyarázatát nyújtják az utolsó évtized ama törekvésének, mely a különböző kémiai elemek ZEEMAN-effektusának kiderítésére irányult. E megfigyeléseknek célja: általánosságban, a különböző elemek spektrálvonalainak a mágneses erőterben való tanulmányozása, közelebbről pedig, a szétbontási típusok közötti bizonyos törvényszerűségek felkeresése volt.

Azonkívül azonban, hogy a szóban forgó spektrumnak egy ily kimerítő vizsgálata a spektrálvonalak közötti, mindeddig ismeretlen törvényszerűségnek felismerését teszi lehetővé, e megfigyeléseknek a ZEEMAN-effektus elmélete szempontjából is igen nagy fontossága van.

Különösen az utóbbi években igen érdekes típusokat és az elmélettől úgy a komponensek fekvését, mint intenzitását illetőleg eltérő szétbontásokat találtak. Ezen tapasztalat alapján kívánatos, hogy minél több elem e magnetooptikai tulajdonsága vizsgálat tárgyává tétessék, mert valószínű, hogy épen ezen a téren nyert tapasztalatok lesznek azok, melyek a fényforrásban végbemenő elektronrezgések komplikált mechanizmusára és az elektronok konstitúciójára fényt fognak deríteni.

Az elemek periodikus rendszerének harmadik osztályába tartozó ritka földfémek közül máig csak egyeseknek, mint pl. MOORE¹ vizsgálata alapján az yttriumnak ZEEMAN effektusa ismeretes.

¹ B. E. MOORE: Annalen der Physik 1908 (4) 25. 309.

Ama tapasztalati tény által vezettetve, hogy a mágneses erőter a kémiaiilag rokon elemek spektrálvonalait hasonló módon komponensekre bontja dr. VOIGT W. tanár úr buzditására a *lanthán* e magnetooptikai tulajdonságát vizsgáltam.

Ez elem a periodikus rendszer harmadik osztályába és a ritka földfémek közé tartozik. Valószínű volt tehát, hogy az yttriumra nézve jellemzőnek talált szétbontási típusok a *lanthán*vonalak ZEEMAN-effektusa között szintén felfedezhetők lesznek, s így a két elem kémiai rokonsága a hasonló ZEEMAN-effektusok alapján is megállapítható lesz.

Sikerült is — ha mindjárt nem is nagy számban — e feltevést megerősítő tapasztalatot megállapítanom, egynéhány szép példát felismernem, a melyek egyes yttriumvonalakkal nemcsak a szétbontás típusát, hanem az összetevők intenzitás-eloszlását és frekvenciakülönbségét is illetőleg azonosak.

A *lanthán*vonalak e részletes vizsgálatán kívül a *kobalt*tal is hasonló kutatást végeztem. Ez elemnél azonban csupán a főspektrálvonalak viselkedésének tanulmányozására szorítkoztam.

Vizsgálataimat a göttingeni physikai intézet híres ROWLAND-féle rács-berendezésén végeztem.¹

E berendezés egyike a világ eddigi legnagyobb és a spektroszkopiai kutatásokra legcélszerűbben berendezett ily eszközének. A berendezésnek óriási mérete van; maga a ROWLAND-féle kör, mely KRUPPnak szép ajándéka, kb. 6·5 méter átmérőjű hatalmas vasalkotmány. E kör ott, a hol a fényforrás spektrálvonalainak éles képe előáll, a photographikus úton történő spektroszkopiai kutatáshoz szükséges photographikus lemezek elhelyezésére czélszerűen van berendezve. Ily módon e berendezéssel egyszerre körülbelül 9 méter hosszú spektrumot lehet felvenni.

E körhöz tartozó és RUNGE tanár tulajdonát képező rács felbontóképessége oly nagy, hogy például a két *D* vonal a ROWLAND-féle körön már az elsőrendű spektrumban egymástól 3·044 mm-re van szétválasztva.

¹ Leírását lásd: Physikalische Zeitschrift 1905. 6. 891.

A rács és a ROWLAND-féle kör az intézet pinczejében, külön e célra készített helyiségben, a hőmérséklet-változásoktól lehetőleg igen védetten van elhelyezve.

A mágneses erőteret nyújtó nagy félgyűrű alakú Du Bois rendszerű elektromágneses és az analysálandó fény előállításához szükséges induktorium a rács helyiségével szomszédos szobában van elhelyezve, a honnan a fény egy kvarcslencse (mely az ultraibolyasugarakat is átbocsátja) közvetítésével a két helyiséget elválasztó falba helyezett résen át jut a konkáv rácsra, onnan pedig elhajlítva a nagy ROWLAND-féle körre.

Az analysálandó fényt a kérdéses anyagot tartalmazó elektródok, a lanthán sóoldatában áztatott szénpálczikák, illetve kobaltfém elektródok között az említett nagy induktoriummal állítottam elő.

A kb. 4 mm. széles és 1 mm. vastag szénpálczikák ott, a hol a szikra előállott, egynéhány tizedmilliméter vastagra lecsiszolva voltak. A két elektród — melyek egyikét az elektromágneztől egy csillámlemez szigetelte — az elektromágnes pólusai között egymásra merőlegesen úgy volt elhelyezve, hogy az elektromos kisülés az erővonalakkal parallel történt. Ily módon a pólusok egymástóli távolságának egészen 2 mm-ig való csökkentése s ezzel a mágneses erőternek nagyfokú növelése vált lehetővé, ami az összetett típusok sűrűn fekvő komponenseinek szétválasztásához volt szükséges.

Az induktórium secundár áramkörébe egy változtatható öninduktiót is kapcsoltam, mely az analysálandó spektrummal egyszerre fellépő levegővonalak eltüntetésére szolgált.

E mellett az önindukció és a secundár áramkörrel parallel kapcsolt kapacitásnak a célznak megfelelő változtatásával a spektrálvonalak élességét és intenzitását is változtathattam.

A mágneses erőter intenzitását $\lambda = 4680.43^1$ Zn vonal ZEEMAN effektusa által határoztam meg. Ugyanis, mivel egyrészt

¹ A spektrálvonal hullámhossza itt s a következőkben is 10^{-8} cm azaz ú. n. Angström-egységben van megadva.



a szétbontás nagysága — miként az az elméletből is adódik¹ — a tapasztalat szerint, a mágneses erőter intenzitásával arányos, másrészt pedig GMELIN² mérése alapján ismeretes, hogy e vonalnak RUNGE³ által észlelt effektusa 23010 Gauss erőterre érvényes, ezért meg volt minden adat a kérdéses erőter kiszámításához.

Az észlelések különböző (25000—28000 Gauss) erőternél történtek. Az összes eredmények azonban a RUNGE-féle erőterre vannak redukálva.

Az összes megfigyeléseket és méréseket photographikus uton végeztem. Az expositió ideje igen különböző volt. Ez a különböző vonalaknál, azok intenzitása és e vonalaknak a spektrumban lévő helye szerint 20 perctől 6 óra hosszáig változott.

Vizsgálataim a transversális effektusok tanulmányozására irányult. A mágneses erővonalakkal parallel (p) és az erre merőleges (m) elektromos rezgéseket egy a fényforrás és a lencse közé iktatott mészpáthasábbal választottam szét.

A p és m rezgéseknek eme szétválasztása fontos volt nemcsak azért, mert ily módon a komponensek polározási állapota felismerhető, hanem azért is, mert az egyes spektrálvonalak összetevőinek mérhető szétválasztása csakis ez úton volt lehetséges.

Az ily módon készült lemezeket ZEISS-féle komparátorral mértem fel. A mérési hiba nagysága a vonalak intenzitásától, főleg pedig élességétől függött. Az igen éles vonalak egymástóli távolságát ± 0.001 mm hibával határozhattam meg; a nehezebben mérhető vonalakról végzett mérések hibája ± 0.005 mm-nél csak ritkán volt nagyobb.

A spektrálvonalakat EXNER és HASCHKEKnek a szikraspektrumra vonatkozó táblázataival identifikáltam, a lantánánál ezenkívül még WOLFFNAK⁴ a lantánvonalakra vonatkozó táblázatos összeállítását is felhasználtam. Az utóbbi táblázatból vett spektrál-

¹ L. (1) egyenletet.

² P. GMELIN: Annalen der Physik 1909 (4) 28. 1079.

³ C. RUNGE és F. PASCHEN: Berichte der Berliner Akademie 1902.

⁴ Das Lanthanspektrum. Inaug.-Diss. Bonn 1905.

vonalak a következőkben az által ismerhetők fel, hogy ezek hullámhossza három tizedesnyi pontossággal vannak megadva.

Az összetevők intenzitásának meghatározása nagy pontossággal nem történhetett, mert semmiféle photometrikus módszer sem állott rendelkezésemre, melynek segélyével a komponensek intenzitásbeli viszonya eldönthető lett volna. Ép ez okból a következőkben a komponensek intenzitásaként megadott számértéknek csakis az egy és ugyanazon spektrálvonal összetevőinek relativ intenzitás eloszlását tekintve van jelentősége.

A táblázatos összeállításban a következő jelöléseket vezettük be: λ Angström, azaz 10^{-8} cm. egységben megadott hullámhossz; $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ a rezgésszámnak 1 cm-re eső változása, azaz az előzőekben szereplő frequentiaváltozásnak $2\pi c$ -ed része; m a mágneses erővonalakra merőleges, p az erővonalakkal par allelektromos rezgés; i a fényerősség; sz széles; d diffus. A d -hez kapcsolt k , b , v és i indexek azt jelentik, hogy a vonal a külső, a belső, a vörös, illetve az ibolya felé eső oldalán diffus.

A táblázatok A -val jelölt része a normális távolságnak $a = \frac{\mu_0}{2\pi c}$ -nak az illető spektrálvonalhoz tartozó törtrészt, vagyis a spektrálvonal alapintervallumát, azonkívül ama tényezőket tartalmazza, melyeknek az alapintervallummal való szorzata a komponensek távolságát nyújtja.

A normális távolság gyanánt

$$a = 1.081$$

értéket választottam, a mely GMELIN által megadott

$$\frac{e}{m} = 1.771 \times 10^7 \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ g}^{-\frac{1}{2}}$$

értékhez tartozik.¹

A tripleteknél a komponensek távolságát helyszűke miatt csak egy számértékkel adtuk meg. Ott, a hol a komponensek intenzitása különböző, a komponensek intenzitásaként megadott két számérték közül az első mindig a vörös felé eső összetevőre vonatkozik.

¹ P. GMELIN: Annalen der Physik 1909 (4) 28. 1079.

Lanthán.

Vizsgálataim legnagyobb részét a lanthán e magnetooptikai viselkedésének kiderítésére fordítottam. Ebbeli kutatásomat nagy mértékben megnehezítette, de annál érdekesebbé tette ama körülmény, hogy a lanthán-spektrumban nagy számban vannak oly spektrálvonalak, a melyek a mágneses erőter befolyása folytán igen komplikáltan bomlanak szét. Ez összetett ZEEMAN-effektust mutató spektrálvonalak között akadtak olyanok, a melyeket a rendelkezésemre álló eszközök segélyével vagy egyáltalában nem sikerült mérhetőleg felbontanom, vagy ha e vonalakról a lehető legnagyobb erőternek alkalmazásával és az egyik fajta rezgésnek egy mészpáthasáb segélyével való eloltásával sikerült is oly felvételt készítenem, hol a komponensek szétválasztottaknak látszottak, az összetevők számának meghatározása és ezek felmérése mindjárt nem a legnagyobb pontossággal volt lehetséges.

Mivel azonban törekvésem a lanthán spektrálvonalak ZEEMAN-effektusának részletes megvizsgálása volt, vizsgálatomat eme vonalakra is kiterjesztettem és a nyert eredményeket is a jelen dolgozatba felvettem.

A mágneses erőter a következő spektrálvonalakat igen érdekesen valószínűleg 12, illetve 10 komponensre bontja szét:

I. táblázat.

4196·74			4575·08		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
4	+ 1·53 m	$14 \times 0\cdot110 \left(\frac{a}{10} \right)$	2	+ 2·07 m	$4 \times 0\cdot52$
8	+ 1·24 m		4	+ 1·58 m	3
8	+ 0·88 m		6 sz.	+ 1·06 p	2
15 sz.	+ 0·65 p		4	+ 1·03 m	2
4	+ 0·56 m	5	2	+ 0·53 m	1
1	[+ 0·43] p	4	1	+ 0·52 p	1
1	[− 0·43] p		1	− 0·52 p	
4	− 0·55 m		2	− 0·57 m	
15 sz.	− 0·65 p		4	− 1·02 m	
8	− 0·88 m		6 sz.	− 1·04 p	
8	− 1·22 m		4	− 1·57 m	
4	− 1·53 m		2	− 2·08 m	

II. táblázat.

3650·31			3715·67		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
2	+1·74 m	$11 \times 0·157 \left(\frac{a}{7}\right)$	2	[+1·93] m	$20 \times 0·096 \left(\frac{a}{11}\right)$
6	+1·26 m	8	3	+1·62 m	17
10 sz.	+0·94 p	6	3	+1·24 m	13
6	+0·79 m	5	2	+0·88 m	9
3	+0·31 m	2	6 sz.	+0·70 p	7
3	—0·33 m		6 sz.	—0·70 p	
6	—0·78 m		2	—0·88 m	
10 sz.	—0·94 p		3	—1·24 m	
6	—1·28 m		3	—1·64 m	
3	—1·72 m		2	[—1·90] m	

E spektrálvonalak az összes, tehát úgy az m , mint a p komponenseket tartalmazó lemezen egyszerű dubleteknek látszanak s e táblázatokban foglalt szétbontás csupán az erővonalakkal parallel és az erre merőleges elektromos rezgésekről külön-külön készített felvételekkel volt lehetséges. Az m komponensek nagy erőtnél jól mérhetőleg vannak szétválasztva. Ezek száma valamennyi spektrálvonalnál nyolcz, a melyek közül négy-négy az eredeti spektrálvonal pozitív, illetve negatív oldalán symmetrikusan és egymástól egyenlő távolságban van elhelyezve. Egyedül a 3715·67 vonal szélső komponense képez kivételt. A míg a felvételeken az m komponensek igen éles és finom vonalak, addig a két nagy intenzitású p komponens, a mely a négy-négy m rezgés között van, széles s ama gyanút kelti, hogy mindenik külön-külön két komponensből áll. Minden törekvésem daczára sem voltam képes e komponensek eme további felbomlását határozottan észlelni, minek alapján valószínűnek tartom, hogy e p komponensek száma csak kettő. A 4575·08 és a 4196·74 spektrálvonalnak e nagy intenzitású p komponensein kívül még két gyenge p komponense van. A négy spektrálvonal hasonló magatartása alapján lehetséges, hogy e gyenge rezgések a 3650·31 és a 3715·67 vonalnál is megvannak és csupán ezek igen kicsiny intenzitása lehet oka annak hogy fel nem találhatók.

A négy spektrálvonal ZEEMAN-effektusa az itt fejtegetett hasonló magatartás mellett egymástól lényegesen eltér. Eltérés mutatkozik nemcsak a komponensek és az eredeti spektrálvonal frequentiakülönbségének, a $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ értékében, hanem már a komponensek elrendezésében is. A p komponenseknek az m ekhez viszonyított relativ helyzete mind a négy esetben teljesen különböző. E p komponens a 3715·67-nál az összes m rezgéseken belül van, a 4196·74-nál a legbelső m komponenspár, a 3650·31-nél pedig a második és a harmadik összetevő között, tőlük egyenlőtlen (1 : 2) távolságban fekszik, a 4575·08 vonal p rezgése ellenben egy m rezgéssel azonos rezgésszámú. Az alapintervallumok $\left(\frac{a}{10}, \frac{a}{7}, \frac{a}{11}\right)$ mind különbözők. A 4196·74 vonal komponensei között a $0\cdot33\left(\frac{3a}{10}\right)$ intervallum hat ízben, 4575·08-nál pedig $0\cdot52$ tizenkét ízben fordul elő. Ezen utóbbi intervallum a normális távolság tört részével semmiféle összefüggésben sincs. A 3650·31 és a 3715·67 vonalnál a $0\cdot47\left(\frac{3a}{7}\right)$, illetve a $0\cdot38\left(\frac{4a}{11}\right)$ távolság hatszor, illetve négyszer tapasztalható. A 3650·31 vonal komponenseinek intenzitásában egy kis dissymmetria jelentkezik.

A következő spektrálvonalak, a melyek az eddig tárgyaltakkal hasonlóságot mutatnak, a komponensek elmosódott volta miatt nehezen és rosszul mérhetők:

III. táblázat.

3265·79			4152·97			4231·10		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
2	$+2\cdot13\ m$	$24\times0\cdot09\left(\frac{a}{12}\right)$	1	$+1\cdot54\ m$	$13\times0\cdot117\left(\frac{a}{9}\right)$	1	$+1\cdot77\ m$	$10\times0\cdot177\left(\frac{a}{6}\right)$
4	$+1\cdot72\ m$	19	2	$+1\cdot14\ m$	10	4	$+1\cdot44\ m$	8
4	$+1\cdot25\ m$	14	4	$+0\cdot82\ p$	7	4	$+0\cdot96\ m$	6
2	$+0\cdot82\ m$	9	2	$+0\cdot68\ m$	6	8	$+0\cdot72\ p$	4
8	$+0\cdot73\ p$	8	1	$+0\cdot36\ m$	3	1	— m	
8	$-0\cdot73\ p$		1	$-0\cdot34\ m$		1	— m	
2	$-0\cdot82\ m$		2	$-0\cdot72\ m$		8	$-0\cdot72\ p$	
4	$-1\cdot25\ m$		4	$-0\cdot82\ p$		4	$-1\cdot01\ m$	
4	$-1\cdot72\ m$		2	$-1\cdot12\ m$		4	$-1\cdot39\ m$	
2	$-2\cdot13\ m$		1	$-1\cdot54\ m$		1	— m	

4238·57			4250·17		
<i>i</i>	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	<i>A</i>	<i>i</i>	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	<i>A</i>
8	+ 1·71 <i>m</i>	$10 \times 0.177 \left(\frac{a}{6}\right)$	2	+ 1·73 <i>m</i>	$10 \times 0.175 \left(\frac{a}{6}\right)$
10	+ 1·41 <i>m</i>	8	4	+ 1·41 <i>m</i>	8
10	+ 1·09 <i>m</i>	6	4	+ 1·07 <i>m</i>	6
8	+ 0·80 <i>m</i>	4	2	+ 0·72 <i>m</i>	4
20 sz.	+ 0·70 <i>p</i>	4	8	+ 0·71 <i>p</i>	4
20 sz.	— 0·70 <i>p</i>		8	— 0·71 <i>p</i>	
8	— 0·75 <i>m</i>		2	— 0·71 <i>m</i>	
10	— 1·09 <i>m</i>		4	— 1·05 <i>m</i>	
10	— 1·43 <i>m</i>		4	— 1·40 <i>m</i>	
8	— 1·76 <i>m</i>		2	— 1·75 <i>m</i>	

A 4231·10, 4238·57 és 4250·17 spektrálvonalak ZEEMAN effektusa, e vonalak felmérésénél elkövetett hiba határán belül, azonosaknak mondhatók. A 4238·57 vonal *m* komponenseinek intenzitásbeli viszonya azonban nem egyezik teljesen a másik két vonal ugyanezen komponenseinek intenzitásbeli viszonyával. A 4238·57 *m* összetevői csaknem egyenlő erősségűek. E három vonal nem tartozhat egy és ugyanazon serieshez egyrészt, mert intenzitásuk nem tesz eleget a serieset alkotó spektrálvonalak ama törvényének, hogy e vonalak intenzitása a hullámhosszal csökken, másrészt pedig nem igen valószínű, hogy a series tagjai ily magasan a spektrumban (4200 Angström körül) oly közel legyenek egymáshoz. A 3265·79 vonal, mely csak igen rosszul mérhető, a 3715·67 (II. táblázat) vonallal mutat némi hasonlóságot.

Ugyanily módon szétbontottaknak látszanak a 3142·99,¹ 3453·32,¹ 3662·24,² 4525·45,² 4699·0,¹ 4743·255² spektrálvonalak is, melyeknél azonban a komponenseket mérhetőleg szétválasztanom nem sikerült.

¹⁻² Az 1 indexszel jelzett vonalak oly effektust mutatnak, melynél legalább is egy *m* komponens van a szét nem bontott spektrálvonal helyéhez legközelebb, mint pl. 3650·31-nál II. táblázat; ellenben a 2-vel ellátott vonalak valószínűleg 3715·67-hez hasonlóan, tehát olyatén módon bontatnak szét, a melynél a *p* komponens fekszik legbelül, vagy legfeljebb rezgésszáma a legbelső *m* komponens rezgésszámával azonos.

Látható ezek alapján, hogy a lanthán spektrálvonalak egy nagy része a mágneses erőter befolyása folytán fly típusra bomlik, miért is e szétbontás a lanthán spektrumra nézve jellemzőnek mondható.

A következő vonal már kisebb erőternél is kitűnően mérhető tizenegy komponensre bomlik:

IV. táblázat.

4300·59		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
1	+ 2·35 m	$3 \times 0·79 \left(\frac{8a}{11}\right)$
10	+ 1·63 p	2
2	+ 1·59 m	2
1	+ 0·79 p	1
1	+ 0·79 m	1
2	+ 0·01 m	0
1	— 0·78 m	
1	— 0·79 p	
2	— 1·57 m	
10	— 1·62 p	
1	— 2·38 m	

E spektrálvonal egyike a legjobban mérhető vonaloknak. A p komponensek egy-egy m komponenssel egyező rezgésszámúak, úgy hogy e komponenseknek az összes, tehát úgy a p , mint az m rezgéseket tartalmazó lemezen való teljes szétválasztása lehetséges nem volt. A komponensek számáról csupán az egyik fajta komponenseknek eloltásával sikerült tiszta képet szerezni. Az eredeti spektrálvonal rezgésszámával azonos egy m komponens rezgésszáma, a többi m komponens ettől symmetrikusan és egyenlő távolságban fekszik, csupán a szélső negatív m komponens képez kivételt. A két p komponens rezgésszámának különbsége a szomszédos m komponensek rezgésszámának differentiájával egyenlő. Az m komponensek intenzitása váltakozó (1 2 1 2 1 2 1), a külső p komponensek intenzitása azonban jelentékenyen nagyobb a többi komponens intenzitásánál. E spektrálvonal igen szép példája annak, hogy a

komponensek frequenciakülönbsége a $\left(\frac{8a}{11}\right)$ intervallumnak kis egészszámú többszöröse. A $\left(\frac{8a}{11}\right)$ távolság e vonal komponensei között 10 ízben fordul elő.

A lanthán spektrálvonalainak összetett ZEEMAN-effektusa között szembevetendő a nonetek nagyszámú előjövele is. E kilencz komponensből álló szétbontások általában három csoportba sorozhatók, úgy hogy az egy és ugyanazon csoportba tartozók, ha mindjárt nem is azonosak, mindazonáltal közöttük legalább is némi hasonlóság mutatkozik. Az ide tartozó vonalakat ily szempontból veszem vizsgálat alá. Hasonló természetű szétbontást mutatnak a következő vonalak:

V. táblázat.

3921·71			4077·51		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
10	+ 1·97 m	?	10	+ 1·28 m	$10 \times 0·13 \left(\frac{a}{8}\right)$
5	+ 1·29 m		6	+ 0·91 m	7
8	+ 0·70 p		2	+ 0·54 m	4
3	+ 0·62 m		8	+ 0·40 p	3
12	0 p		10	0 p	0
3	— 0·62 m		8	— 0·40 p	
8	— 0·70 p		2	— 0·54 m	
5	— 1·29 m		6	— 0·90 m	
10	— 1·98 m		10	— 1·29 m	

4430·11			4716·594		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
10	+ 1·45 m	$12 \times 0·121 \left(\frac{a}{9}\right)$	5	+ 2·30 m	$13 \times 0·178 \left(\frac{a}{6}\right)$
3	[+ 0·98] m		2	+ 1·57 m	9
1	— m		1	[+ 0·93] m	5
8	+ 0·47 p		4	+ 0·70 p	4
10	0 p		6	0 p	0
8	— 0·47 p		4	— 0·70 p	
1	— m		1	[— 0·92] m	
3	[— 0·99] m		2	— 1·58 m	
10	— 1·46 m		5	— 2·29 m	

E vonalak valamennyien a mészpáthasáb alkalmazása nélküli felvételeknél igen szép septupletek, s ezeket eleinte mint ilyeneket mértem fel. A belső igen gyenge m komponenseket csak később, a komponensek szétválasztásával és a három utóbbi vonalnál ezenfelül csak igen hosszú ideig — 5 óráig — tartó expositióval sikerült feltalálnom. A szétbontás mind a négy esetben szimmetrikus, a komponensek intenzitásbeli eloszlása és a három utóbbi vonalnál az m és p komponensek elrendezése is teljesen hasonló. A 3921·71 vonal belső m és szélső p komponensének rezgésszáma között észlelt kicsiny különbség mérési hibának nem tulajdonítható, mint azt a különböző lemezeken végzett mérések, melyek az itt közölt középértéktől legfeljebb $\pm 0\cdot01$ -al tértek el, bizonyítják. Ennek tekintetbe vételével a komponensek távolsága a normális szétbontás — « a » — kisszámú törtrészenek egészszámú sokszorosaként nem állítható elő. Az észlelt rezgésszámdifferentiák talán $0\cdot09 \left(\frac{a}{12} \right)$ -el legjobban volnának kifejezhetők. Ez érték azonban az egyik m összetevőnek az eredeti vonaltól való távolságaként $14 \times 0\cdot09 = 1\cdot26$ értéket nyújtana, mely az észlelt $1\cdot29$ -tól $-0\cdot03$ -al eltér. Ez igen jól mérhető vonal felmérésénél ekkora mérési hiba elkövetését a fentiek alapján kizártnak tartom. E spektrálvonal szétbontása Ritz elméletének eredményével igen szépen egyezik. A 4077·51, 4430·11 és 4716·594 vonalak ZEEMAN-effektusa, ha nem is azonos, de kétségtelenül hasonló és a komponensek frequentiakülönbségei — melyek oly pontosan meghatározhatók nem voltak, mint a 3921·71 adatai — egymással arányosak. A 4430·11 vonal belső m komponense oly gyenge, hogy e vonalról igen hosszú ideig tartó expositióval sem sikerült kíváncsi pontossággal felmérhető felvételt készítenem. A 4077·51 és a 4716·594 vonalaknál a három p komponens és a három m komponens egymástól távolsága azonos, miért is ezek amazoknak a vörös és az ibolya felé $\frac{7a}{8}$, illetve $\frac{9a}{6}$ -al való eltolásával származtathatók

(RITZ elmélete). Az alapintervallumok különbözők. A $0\cdot39 \left(\frac{3a}{8}\right)$ távolság a $4077\cdot51$, $0\cdot71 \left(\frac{4a}{6}\right)$ köz pedig a $4716\cdot594$ vonal komponensei között 6—6 ízben konstatalható.

A következő spektrálvonal a mágneses erőter befolyása folytán az eddigiektől eltérő módon és a harmadrendű spektrumban igen jól mérhetőleg kilencz komponensre bomlik :

VI. táblázat.

3381·10		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
$2d_k$	$+1\cdot72\ m$	$4\times0\cdot43 \left(\frac{2a}{5}\right)$
5	$+1\cdot27\ m$	3
8	$+0\ 89\ m$	2
6	$+0\ 43\ p$	1
8	0 p	0
6	$-0\ 43\ p$	
8	$-0\ 89\ m$	
5	$-1\cdot27\ m$	
$2d_k$	$-1\cdot71\ m$	

E typus daczára annak, hogy itt a p és m komponensek fekvése az előzőkével megegyezik, nem mutat azokkal semmiféle hasonlatosságot. A szélső m összetevő kivételével az összes komponensek intenzitása csaknem teljesen egyező. A szélső m komponens, mely a többieknél jóval kisebb intenzitású, kifelé elmosódott. Minden egyes összetevő a szomszédosaktól egyenlő távolságra van, minek folytán a $\left(\frac{2a}{5}\right) 0\cdot43$ alapintervallum a komponensek között összesen nyolczszor fordul elő. E vonal a RUNGE-féle szabály érvényességét szépen igazolja.

A következő ugyancsak kilencz komponensből álló típusokban öt p és négy m komponens fordul elő:

VII. táblázat.

4436·02			4076·89		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
1	+ 2·62 m	$4 \times 0·649 \left(\frac{3a}{5} \right)$	4	+ 1·81 m	$5 \times 0·359 \left(\frac{a}{3} \right)$
1	+ 1·98 m		2	+ 1·44 m	
1	+ 1·28 p		4	+ 0·67 p	
1	+ 0·63 p		4	+ 0·38 p	
1	— 0·01 p		4	— 0·02 p	
1	— 0·64 p		4	— 0·37 p	
1	— 1·31 p		4	— 0·66 p	
1	— 1·93 m		2	— m	
1	— 2·65 m		4	— m	

4316·04			4383·62		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
2	+ 2·54 m	$13 \times 0·196 \left(\frac{2a}{11} \right)$	4 d_b	+ 2·05 m	$9 \times 0·23 \left(\frac{3a}{14} \right)$
1	+ 2·15 m		3	+ 1·63 m	
2	+ 1·20 p		2	+ 0·93 p	
2	+ 0·59 p		4	+ 0·46 p	
2	+ 0·01 p		4	0 p	
2	— 0·61 p		4	— 0·46 p	
2	— 1·17 p		2	— 0·93 p	
1	— 2·13 m		3	— 1·63 m	
2	— 2·55 m		4 d_b	— 2·05 m	

4713·081			3725·24		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
2	+ 2·42 m	$5 \times 0·494 \left(\frac{5a}{11} \right)$	4	+ 1·98 m	$5 \times 0·40 \left(\frac{4a}{11} \right)$
1	+ 1·99 m		2	+ 1·59 m	
2	+ 0·99 p		4	+ 0·80 p	
2	+ 0·52 p		4	+ 0·42 p	
2	0 p		4	0 p	
2	— 0·49 p		4	— 0·42 p	
2	— 0·99 p		4	— 0·80 p	
1	— 1·96 m		2	— 1·59 m	
2	— 2·46 m		4	— 1·98 m	

E vonalak általában valamennyien igen gyengék és a komponenseik oly közel fekszenek egymáshoz, hogy a mérhető felvételhez igen nagy erőter alkalmazása volt szükséges. A 4436·02 vonalról az I. rendű spektrumban csak öt óráig tartó expositióval volt lehetséges mérhető felvételt készítenem. E vonal a többiekkel csupán a komponensek fekvését illetőleg mutat hasonlóságot, de különben azoktól teljesen különbözik. A 4436·02 vonal összes komponensei egyező intenzitásuk és egymástól élesen elválasztva vannak, ellenben a többi vonal komponenseinek intenzitása eltérő erősségű: a belső m komponens igen gyenge és a szélső m összetevőhöz oly közel fekszik, hogy e komponens jelenlétét csak nagy erőtérnél ismerhettem fel. A 4436·02 komponensei dissymmetrikus elrendezést mutatnak. E dissymmetria pusztá szemmel is látható. A szélső p és a belső m összetevők közötti távolság a pozitív oldalon, az m komponensek frequentiakülönbsége pedig a negatív oldalon nagyobb. Ha az itt előforduló dissymmetriát az alapintervallum meghatározásánál tekintetbe nem vesszük, akkor a komponensek távolsága legjobban $\frac{3a}{5}$ -el fejezhető ki. Ez esetben a rezgések a szomszédos rezgésektől egyenlő rezgésszámmal térnek el. Az itt előforduló többi spektrálvonal szétbontása rendkívül nehézséggel járt és a táblázatban közölt értékek sok kísérletnek és nagy fáradságnak az eredménye. E vonalaknál a komponensek intenzitásbeli eloszlása hasonló. A belső m komponens valamennyi vonalnál diffus és nehezen mérhető. A 4076·89 vonal vörös m összetevői nem mérhetők, mert kis erőtérnél ez összetevők nincsenek szétválasztva, nagy erőtérnél pedig a 4067·52 vonal e komponensekkel határos, a mely körülmény e komponensek felmérését lehetetlenné teszi. E vonal középső p komponense egy kissé a vörös felé van eltólva; e kis dissymmetria a hiba határon belül fekszik, mert e vonal nem tartozik a jól mérhetők közé. A 4713·081 vonal szélső m komponensei is egy kissé dissymmetrikus fekvésűek. A komponensek távolsága itt is a negatív oldalon nagyobb. E vonalak között duplikatum nem

található; a 3725·24, 4076·89 és 4713·081 vonalak effektusa azonban hasonló. Mind a három vonalnál ama tényezők, melyekkel az alapintervallumokat szoroznunk kell, hogy a frequentia-különbségeket kaphassuk, egyenlők, de maguk az alapintervallumok különbözök. Az alaptávolságok között főként $\frac{a}{11}$ nagyszámban fordul elő; ez intervallum a lanthán vonalakra nézve jellemzőnek látszik. Ezen vonalak, nemkülönben a 4383·62 vonal komponenseinek távolsága között az illető intervallum 6—6 ízben fordul elő.

A következő vonalak valószínűleg hasonló elrendezésű kilencz komponensre bomlanak:

VIII. táblázat.

3713·71			4647·64			4669·10		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
3 d	+2·22 m	$13 \times 0 \cdot 171 \left(\frac{a}{6}\right)$	1	+2·35 m	$5 \times 0 \cdot 47 \left(\frac{6a}{14}\right)$	3	+2·04 m	$5 \times 0 \cdot 41 \left(\frac{3a}{8}\right)$
2	+1·86 m	11	1	+1·89 m	4	2	+1·63 m	4
2	+0·69 p	4	2	+0·93 p	2	2	+0·78 p	2
3	+0·35 p	2	2	+0·48 p	1	3	+0·43 p	1
3	0 p	0	2	0 p	0	3	0 p	0
3	-0·35 p		2	-0·48 p		3	-0·43 p	
2	-0·71 p		2	-0·93 p		2	-0·78 p	
2	-1·86 m		1	-1·89 m		2	-1·63 m	
3 d	-2·22 m		1	-2·35 m		3	-1·99 m	

E mérések igen gyengék, miért is az itt közölt számoknak nagy fontosság nem tulajdonítható. Ép ez oknál fogva az alapintervallumoknak sincs jelentőségük. A belső öt p komponens jelenlétét biztonsággal megállapítani nem lehet. Az itteni adatokat csak azért közlöm, hogy reámutassak a szétbontás nagyságára és természetére, arra, hogy belül a p összetevők, kívül pedig az m komponensek vannak. A felmért vonalakon kívül valószínűleg a 3665·5, 4079·37, 4335·15 lanthánspektrál-vonalak is hasonló szétbontást mutatnak.

Ugyancsak nagyon rosszul mérhetőleg talán nyolcz komponensre bomlanak az alább közölt vonalak:

IX. táblázat.

3936·40			4433·15		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
$3d$	$+1\cdot66\ m$	$5\times0\cdot33\left(\frac{3a}{10}\right)$	1	— m	$3\times0\cdot19\left(\frac{a}{6}\right)$
1	$+1\cdot31\ m$	4	1	— m	
2	— p	(2) ?	2	$+0\cdot56\ p$	
2	— p	(1) ?	2	$+0\cdot19\ p$	
2	— p		2	$-0\cdot19\ p$	
2	— p		2	$-0\cdot56\ p$	
	?		2	— m	
$3d$	$-1\cdot66\ m$		2	— m	

3936·40 vonalnál a belső vörös m komponens nem látható. A 4433·15 vonal komponenseinek intenzitása dissymmetrikus. A megadott alapintervallumoknak eme vonalaknál sincs semmi jelentőségük, mert a megismételt mérések egymástól nagy mértékben eltértek.

A következő vonalak mindenikének hét-hét komponense van :

X. táblázat.

3104·76			3193·09		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
$2d$	$+1\cdot61\ m$	$3\times0\cdot54\left(\frac{a}{2}\right)$	3 sz.	$+2\cdot70\ m$	$5\times0\cdot54\left(\frac{a}{2}\right)$
1	— m	(2) ?	2	$[+1\cdot54] ?$	3
3	$+0\cdot54\ p$	1	2	$+1\cdot13\ p$	2
3	0 p	0	3	0 p	0
3	$-0\cdot54\ p$		2	$-1\cdot13\ p$	
1	— m		2	$[-1\cdot54] ?$	
2	$-1\cdot61\ m$		3 sz.	$-2\cdot72\ m$	

3249.49			4275.80		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
1	+ 1.10 m	$2 \times 0.54 \left(\frac{a}{2}\right)$	3	+ 1.63 m	$4 \times 0.404 \left(\frac{3a}{8}\right)$
3	+ 0.53 p	1	2	+ 1.22 m	3
10 d_k	+ 0.51 m	1	3	+ 0.39 p	1
3	0 p	0	3	0 p	0
10 d_k	- 0.51 m		3	- 0.39 p	
3	- 0.53 p		2	- 1.22 m	
1	- 1.10 m		3	- 1.63 m	

4474.716			4727.5		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
1 d	[+ 1.98] m	$5 \times 0.402 \left(\frac{3a}{8}\right)$	4	+ 2.06 m	$5 \times 0.41 \left(\frac{3a}{8}\right)$
1	[+ 1.22] m	3	2	[+ 1.70] m	4
1	+ 0.81 p	2	4	+ 0.42 p	1
1	+ 0.02 p	0	4	- 0.01 p	0
1	- 0.86 p		4	- 0.41 p	
1	[- 1.20] m		2	[- 1.75] m	
1 d	[- 2.02] m		4	- 2.04 m	

4946.60			4986.989		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
2	+ 1.96 m	$3 \times 0.65 \left(\frac{3a}{5}\right)$	2 d_b	+ 1.52 m	$3 \times 0.508 \left(\frac{6a}{13}\right)$
1	+ 1.27 m	2	1	+ 1.03 m	2
2	+ 0.68 p	1	2 d	+ 0.49 p	1
2	0 p	0	2 d	0 p	0
2	- 0.68 p		2 d	- 0.51 p	
1	- 1.27 m		1	- 1.04 m	
2	- 1.96 m		2 d_b	- 1.52 m	

A három első spektrálvonal alapintervalluma, a mely a normális távolságnak « a »-nak fele, közös ugyan, de e vonalak között egyéb azonosság nem konstatálható. A 3104.76 vonal igen gyenge m összetevője nem mérhető, e komponens távolsága valószínűleg az alapintervallum kétszerese. E vonalnál a

szélső m komponensek egy kissé diffusak. A 3193·09 a közölt lanthánvonalak között található legnagyobb szétbontást nyújtja. Az eredeti vonaltól $\frac{3a}{2}$ távolságra lévő vonal csupán az összes vonalakat tartalmazó lemezen volt látható. E komponens rezgése valószínűleg az erővonalakra merőlegesen történik s lehetséges, hogy e vonal intenzitásának kicsiny volta, a mely a mészpáthasáb közbeiktatása által még kisebbedik, oka annak, hogy e komponens *csak* az m rezgéseket tartalmazó felvételen feltalálható nem volt. A normális távolság 1·08 (a) e vonal komponensei között négyszer fordul elő. A 3249·49-nál az összetevők intenzitása egymástól nagy mértékben tér el; az igen erős p komponens ezenfelül kifelé elmosódott, mely körülmény e vonalhoz közelfekvő összetevők jelenlétét bizonyítja. Egy m és egy p rezgéspár egyező rezgésszámú; e vonalak az eredeti spektrálvonal helyén lévő p komponenstől $\frac{a}{2}$, a szélső m összetevők pedig ugyanettől a távolságra vannak, minek folytán e spektrálvonal összetevői között a $0\cdot54 \left(\frac{a}{2}\right)$ intervallum hat ízben fordul elő. A 4474·716 és 4727·5 vonalak komponensei kissé diffusak, miért is az m összetevők jól nem mérhetők. E vonalak nem duplikatumok, bár a szélső komponensek egyenlő szétbontást mutatnak és az intervallum $\frac{3a}{8}$ mind a két vonalnál egyenlő. A 4275·80, 4946·60 és 4986·989 vonalak szintén különbözőképen bomlanak fel. Némi hasonlóság látszik a 4275·80 és a 4946·60 vonalak között, mennyiben a komponensek távolsága mind a két esetben $\frac{a}{11}$ egészszámu sokszorosával is kifejezhető. E vonalak igen szép septupletek, melyek nemcsak az intenzitáseloszlást tekintve, hanem a felbontás egész kinézését és karakterét illetőleg is, az V. táblázatban foglalt vonalak effektusával azonosak. Ez utóbbi vonalaknál azonban a harmadik összetevőt a komponensek szétbontásával kettősnek: egy p és egy m rezgésből összetettnek találtam. Az itt közölt vonalaknál a rezgések szét-

választásával sem sikerült a hiányzónak vélt vonal jelenlétéről meggyőződnöm. Tekintve azonban azt, hogy az V. táblázat vonalainál e gyenge vonal felvételére igen hosszú ideig tartó expositió volt szükséges, lehetségesnek tartom, hogy e rezgések itt is jelen vannak és csak ezek igen kis intenzitása, nemkülönben az a körülmény, hogy e vonalak, különösen a 4946·60 vonal épen nem fekszik a spektrumnak a photographikus lemez iránti legérzékenyebb részében, oka annak, hogy e rezgések az m rezgések között feltalálhatók nem voltak. Ebbeli véleményemet támogatja az a teljes azonosság is, a mely a 4946·60 és a 3921·71 vonalak között a komponensek távolságát illetőleg is fennáll. E két vonal ily értelemben duplikatum, de nem tartozik ugyanazon serieshez, mert a vonalak intenzitása a hullámhosszal együtt nem csökken. A 4986·989 vonal és a 4430·11 (V. táblázat) vonal komponenseinek frekuensiakülönbségei között az eltérés kissé nagyobb, mindazonáltal kétségtelen, hogy e két vonal szétbontása között is nagyfokú hasonlóság van. A 4275·80 vonal effektusához hasonlót azonban a nonettek között nem találtam. E vonal komponensei nincsenek æquidistans elhelyezésben; a két m komponens, nemkülönben a három p összetevő kölcsönös távolsága azonos, de a külső p és a belső m rezgések frekuensiakülönbsége ennél nagyobb, miért is a közös $\frac{3a}{8}$ intervallum négy ízben fordul elő, eltérőleg a többiektől, hol a $\frac{3a}{5}$, illetve $\frac{6a}{13}$ közhat-hat ízben lép fel.

A mágneses erőter a következő spektrálvonalakat 6—6 komponensre bontja:

XI. táblázat.

3303·26			3513·06		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
3	+ 1·66 m	$3 \times 0.55 \left(\frac{a}{2}\right)$	1	+ 1·16 m	$2 \times 0.59 \left(\frac{6a}{11}\right)$
4	+ 1·08 p	2	4	+ 0·61 p	1
3	+ 0·56 m	1	1	+ 0·58 m	1
3	— 0·56 m		1	— 0·58 m	
4	— 1·08 p		4	— 0·61 p	
3	— 1·66 m		1	— 1·16 m	

3916·21			4152·17		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
5	+ 0·96 m	$9 \times 0.105 \left(\frac{a}{10}\right)$	4	+ 0·84 m	$8 \times 0.105 \left(\frac{a}{10}\right)$
6	+ 0·52 m	5	4	+ 0·52 m	5
10	+ 0·41 p	4	8	+ 0·31 p	3
10	— 0·41 p		8	— 0·31 p	
5	— 0·52 m		4	— 0·53 m	
5	— 0·97 m		4	— 0·83 m	

4605·99			4804·218		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
2	+ 1·63 m	$12 \times 0.134 \left(\frac{a}{8}\right)$	3	+ 1·52 m	$8 \times 0.196 \left(\frac{2a}{11}\right)$
2	+ 0·91 m	7	4	+ 1·01 p	5
4	+ 0·67 p	5	3	+ 0·60 m	3
4	— 0·67 p		2	— 0·57 m	
2	— 0·93 m		4	— 1·01 p	
2	— 1·62 m		3	— 1·58 m	

E vonalak között egyetlen azonos sem található, csupán a 3303·26 és a 4804·218 vonal között van valami hasonlatosság; de ezek nem duplikátumok. Mind a két vonal ugyanis a harmadrendű, illetve az elsőrendű spektrumban kitűnően mérhető és a különböző lemezekén végzett mérések külön-külön egymással olyannyira megegyeztek, hogy a szétbontások közötti eltérés

egész határozottan megállapítható volt. Ehhez járul, hogy a távolságok közötti eltérés iránya a különböző komponenseknél egymással ellenkező, továbbá, hogy a míg a 3303·26 vonal teljesen szimmetrikusan egymástól egyenlő távolságra fekvő összetevőkre bomlik, addig a 4804·218 vonal úgy a komponensek elrendezését, mint azok intenzitását illetőleg, már a puszta szemmel is észrevehető disszimmetrikus szétbontást mutat. Az utóbbi vonal csupán a komponensek szétválasztásával volt felmérhető, miért is a p komponenseket szimmetrikus fekvésűeknek vettem fel, az m összetevők távolságát ellenben a komponensek súlypontjától számítottam. A belső m rezgések közül a szélsőkhöz közelebb fekvő pozitív komponens nagyobb intenzitású. Ha a szétbontást szimmetrikusnak vesszük fel, akkor az összetevők távolsága ismét $\frac{a}{11}$ értékkel fejezhető ki legjobban. A 3303·26 vonal effektusa, a melynél a komponensek távolsága az $\frac{a}{2}$ -nek 1, 2, 3-szorosa igen szép példája annak, hogy a RUNGE-féle szabály érvényes. Daczára annak, hogy a fenti két vonal szétbontása közötti különbséget kétségbevonhatatlanul megállapíthattam, mégis a serieskeresésnél e vonalakkal is kísérletet tettem, még pedig amaz oknál fogva, mert e vonalak a spektrumnak körülbelül ama részében fekszenek, a hol a lantnánnal kémiaiilag rokon indium és thallium második mellékseriesének harmadik és negyedik tagja van. A 3513·06 vonalnál egy m és a p komponens egyező rezgésszámú. Az utóbbi rezgés intenzitása jelentékenyen fölülmulja az m összetevők intenzitását. A 3916·21 és a 4152·17 vonalnál az a -pintervallum egyenlő, de a tényezők eltérők. Mindkét vonalnál az m komponensek egymástóli távolsága $\frac{2a}{5}$, illetve $\frac{3a}{10}$ a p rezgésnek az eredeti vonaltól való távolságával egyenlő. Az előző vonalnál a komponensek intenzitása kissé disszimmetrikus: a belső pozitív m komponens a negatív összetevőnél nagyobb intenzitású. Úgy e két vonal, mint pedig a 4605·99 vonal is a RUNGE-féle szabály érvényességét fényesen igazolja. A 4605·99 vonal alapintervalluma

$\frac{a}{8}$; az m összetevők frequentiakülönbsége eme vonalnál is a p komponens távolságával egyenlő; a p és a belső m összetevő itt ép úgy miként a többiekénél is, igen közel van egymáshoz. Valószínűleg a 3701·9 és a 4717·743 vonal is hasonló természetű hat komponensre bomlik. E vonalak pontos mérésre nem alkalmasak, miért is csak itt említem fel, hogy ezek nagy mértékben hasonlóak s hogy a mágneses erőter a 4717·743 vonalat $\pm 0\cdot50(p)$, $\pm 0\cdot83(m)$, $\pm 1\cdot37(m)$ távolságú komponensekre bontja, miként az nagyszámú, de nem elég pontos mérésekből adódott.

A következő vonalaknak öt-öt komponensük van:

XII. táblázat.

3621·96			4691·344		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
1 sz.	+ 2·73 m	$5 \times 0\cdot55 \left(\frac{a}{2}\right)$	2 d_k	[+ 0·66] m	$1 \times 0\cdot55 \left(\frac{a}{2}\right)$
1 sz.	+ 1·14 p		1	+ 0·49 p	1
1	0 p	0	1	0 p	0
1 sz.	— 1·14 p		1	— 0·49 p	
1 sz.	— 2·73 m		2 d_k	[— 0·66] m	

Mindkét vonal nehezen mérhető. A 3621·96 vonal külső komponensei gyengék és szélesek; lehetséges, hogy e komponenseken belül még egy összetevő van, de e vonal oly gyenge, hogy annak jelenlétét biztosan nem észlelhettem. A 4691·344 vonal m összetevői kifelé elmosódottak, mely körülmény ennek pontosabb felmérését lehetetlenné tette. A 3621·96 vonal a hét összetevőre bomló 3193·09 (X. táblázat) vonallal sok tekintetben hasonlóképen viselkedik. Nemcsak a két vonal alapintervalluma egyenlő, hanem a megfelelő komponensek frequentiakülönbsége is azonos. A 3193·09 vonalnak $\frac{3a}{2}$ távolságra fekvő összetevője is, miként azt fentebb említettem, szintén oly gyenge, hogy az csak igen hosszú ideig tartó expositióval és a mészpáthasáb alkalmazása nélkül volt felvehető. A külső komponensek

mind a két vonalnál szélesek. A 4691·344 vonal ugyancsak a X. táblázatban lévő 3249·49 vonallal hasonlítandó össze. E két vonal között szintén nagy a hasonlatosság. A p komponenseknél nagyobb intenzitású m összetevők mindkét vonalnál kifelé elmosódottak. A p komponensek távolsága mind a két vonalnál ugyanaz, az m komponensek frequenciakülönbségében azonban már nagyobb az eltérés; ekkora hiba kissé nagy, de ez éppen e komponensek diffus volta miatt egészen kizártnak nem tartható. A 3249·49 vonal «a» távolságra lévő komponensének analogonját a 4691·344 vonal összetevői között nem találtam meg. A 4691·344 és a 3249·49 vonal között konstatálható hasonlóság alapján e vonal alapintervallumaként $\frac{a}{2}$ értéket választottam, bár a komponensek távolsága a $0\cdot095 \left(\frac{a}{11}\right)$ intervallum 0, 5, 7-szeresével sokkal jobban fejezhető ki.

A következő vonalak quadrupletek:

XIII. táblázat.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	Észrevételek
3736·6	1	$[+1\cdot29] m$	$7 \times 0\cdot188 \left(\frac{a}{6}\right)$	Az m komponensek diffusak
	3	$+0\cdot41 p$	2	
	3	$-0\cdot41 p$		
	2	$[-1\cdot34] m$		
3784·96	1	$+0\cdot84 m$	$5 \times 0\cdot168 \left(\frac{2a}{13}\right)$	
	1	$+0\cdot18 p$	1	
	1	$-0\cdot18 p$		
	1	$-0\cdot86 m$		
3846·16	2	$+1\cdot22 m$	$4 \times 0\cdot305 \left(\frac{2a}{7}\right)$	Az összes komponensek diffusak és elmosódottak.
	2	$+0\cdot31 p$	1	
	2	$-0\cdot31 p$		
	2	$-1\cdot22 m$		
3981·55	2	$+1\cdot02 m$	$5 \times 0\cdot203 \left(\frac{2a}{11}\right)$	A komponensek diffusak ¹
	2	$+0\cdot40 p$	2	
	2	$-0\cdot40 p$		
	2	$-1\cdot03 m$		

¹ Lehetséges, hogy a diffus összetevők még több komponensből állanak.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	Észrevételek
3994·67	2	+ 1·31 m	$7 \times 0·187 \left(\frac{a}{6}\right)$ 3	d
	2	+ 0·57 p		
	2	— 0·57 p		d
	2	— 1·31 m		
3995·91	5	+ 0·97 m	$7 \times 0·138 \left(\frac{a}{8}\right)$ 2	d
	4	+ 0·30 p		
	4	— 0·30 p		d
	5	— 0·97 m		
4086·90	10	+ 0·87 m	$3 \times 0·295 \left(\frac{3a}{11}\right)$ 1	
	20	+ 0·30 p		
	20	— 0·30 p		
	10	— 0·87 m		
4311·902	1	+ 1·04 m	$5 \times 0·212 \left(\frac{a}{5}\right)$ 3	
	1	+ 0·64 p		
	1	— 0·64 p		
	1	— 1·04 m		
4333·97	10	+ 1·03 m	$5 \times 0·21 \left(\frac{a}{5}\right)$ 1	
	10	+ 0·21 p		
	10	— 0·21 p		
	10	— 1·03 m		
4378·24	3	+ 1·05 m	$5 \times 0·21 \left(\frac{a}{5}\right)$?	Igen diffusak
	2	— p		
	2	— p		
	3	— 1·05 m		
4419·30	2	+ 1·11 m	$4 \times 0·28 \left(\frac{a}{4}\right)$ 1	
	2	+ 0·29 p		
	2	— 0·29 p		
	2	— 1·11 m		
4423·37	2	+ 1·08 m	$11 \times 0·099 \left(\frac{a}{11}\right)$ 9	Az összes komponensek igen diffusak.
	2	+ 0·91 p		
	2	— 0·91 p		
	2	— 1·08 m		
4455·99	2	+ 1·52 m	$7 \times 0·217 \left(\frac{a}{5}\right)$ 1	
	2	+ 0·22 p		
	2	— 0·22 p		
	2	— 1·52 m		

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	Eszrevételek
4494·869	1	+ 0·73 m	$3 \times 0·243 \left(\frac{2a}{9}\right)$	Az m -ek diffusak
	1	+ 0·51 p	2	
	1	— 0·51 p		
	1	— 0·73 m		
4550·948	1	+ 0·84 p	$2 \times 0·415 \left(\frac{3a}{8}\right)$	A külső kompo- nensek a parallel rezgések
	1	+ 0·41 m	1	
	1	— 0·40 m		
	1	— 0·85 p		
4571·144	1	+ 1·08 m	$5 \times 0·22 \left(\frac{a}{5}\right)$	D
	1	+ 0·46 p	2	
	1	— 0·46 p		D
	1	— 1·08 m		
4615·240	1	+ 1·48 m	$21 \times 0·07 \left(\frac{a}{14}\right)$	A p és m rezgés- száma közötti különbség igen kicsiny.
	1	+ 1·41 p	20 vagy	
	1	— 1·41 p	$\left. \begin{matrix} 1 \times 1·445 \left(\frac{4a}{3}\right) \end{matrix} \right\}$	
	1	— 1·48 m		
4636·60	2	+ 1·04 m	$5 \times 0·21 \left(\frac{a}{5}\right)$	
	2	+ 0·21 p	1	
	2	— 0·21 p		
	2	— 1·04 m		
4645·46	2	[+ 1·26] m	$2 \times 0·60 \left(\frac{6a}{11}\right)$	Az m összetevők igen diffusak ¹
	4	+ 0·59 p	1	
	4	— 0·59 p		
	2	[— 1·26] m		
4648·844	1	[+ 0·60] m	$5 \times 0·12 \left(\frac{a}{9}\right)$	Az m komponensek igen diffusak ¹
	1	+ 0·48 p	4	
	1	— 0·48 p		
	1	[— 0·60] m		
4650·528	1	+ 1·22 m	$4 \times 0·305 \left(\frac{2a}{8}\right)$	
	1	+ 0·32 p	1	
	1	— 0·32 p		
	1	— 1·22 m		
4655·71	5	+ 1·28 m	$7 \times 0·183 \left(\frac{a}{6}\right)$	$\left. \vphantom{\begin{matrix} 7 \times 0 \cdot 183 \left(\frac{a}{6}\right) \\ 2 \end{matrix}} \right\}$ elmosódottak
	5	+ 0·39 p	2	
	5	— 0·39 p		
	5	— 1·28 m		

¹ Lehetséges, hogy a diffus összetevők még több komponensből állanak.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	Észrevételek
4663·97	4	+ 1·10 m	$5 \times 0·22 \left(\frac{a}{5}\right)$	A vonalak diffusak
	4	+ 0·20 p	1	
	4	— 0·20 p		
	4	— 1·10 m		
4827·031	1	+ 1·17 m	$3 \times 0·39 \left(\frac{4a}{11}\right)$	
	1	+ 0·36 p	1	
	1	— 0·36 p		
	1	— 1·16 m		

Az alapintervallumoknak e táblázatban gyakran előforduló 1, 4 vagy 1, 5, vagy ehhez hasonló viszonyban lévő tényezői a lanthánquadrupletek ama karakteristikus tulajdonságát árulják el, hogy a p komponenseik egymáshoz igen közel, legtöbbször az m összetevők távolságának felénél jóval közelebb fekszenek. E p összetevők szétválasztása többnyire szintén csak nagy erőterénél volt lehetséges. Az alapintervallumok meghatározása kevés komponenszt számláló vonalaknál, mint például a jelenlévő quadrupleteknél is nagy biztonsággal nem történhetik. A míg ugyanis a nagyszámú komponensre bomló vonalak intervalluma magából a szétbontásból jóformán keresés nélkül, szinte önként adódik, addig a kevés komponensből álló vonalak komponenseinek távolsága több ízben különböző intervallummal is teljesen jól és hozzá a hibahatáron belül fejezhető ki. Az A -val jelölt oszlopban előforduló intervallumok elég különbözők. Ezek között különösen szembevető az $\frac{a}{11}$ és $\frac{a}{5}$ elég gyakori előjövetele. Az $\frac{a}{11}$ intervallummal a négyenél több komponensből álló effektusoknál is gyakran találkozunk. E törtrész itt is felhívja a figyelmet. Az $\frac{a}{11}$ öt vonal intervallumaként találtatott. Ezek közül azonban nincs két azonos. Az $\frac{a}{5}$ intervallum a táblázatban lévő vonalak között hét ízben fordul elő. E hét vonal közül a 4333·97, 4636·60 és 4663·97 vonalak tényezői és a komponensek intenzitásai is egyenlők,

de e vonalak egy és ugyanazon serieshez nem tartoznak, mert a 4333·97 vonal intenzitása a nálánál nagyobb hullámhosszaságú vonalak intenzitását jelentékenyen felülmúlja, a másik két, 4636·60 és 4663·97 vonal pedig, a melynek intenzitás-különbsége a seriesek törvényének megfelel, egymáshoz közel fekszik. Az $\frac{a}{5}$ intervallumba tartozó többi vonal között két azonos nem található. A mágneses erőter a 3846·16 és 4650·528 vonalat azonosan bontja szét. A komponensek az eredeti spektrálvonal helyétől $\frac{2a}{7}$ -nek egy és négyszeres távolságára vannak. A kisebb hullámhosszúságú vonal azonban nagyobb intenzitású. A 3736·6, 4655·71 vonalak szintén egyenlően bomlanak szét. A 4550·948 vonalnál az összetevők polárizátsbeli állapota a rendestől eltérő, a mennyiben a szélső komponensek az erővonalakra merőlegesen, a belsők pedig az erővonalakkal parallel vannak polárizva.¹

A következő vonalak tripletre bomlanak:

XIV. táblázat.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Megjegyzések	λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Megjegyzések
2791·60	1, 2	$\pm[1\cdot12]m$		3376·45	2, 4	$\pm 0\cdot93 m$	d_r
2798·65	1, 2	$[1\cdot14]$		3411·95	1, 2	1·61	
2808·46	2, 4	1·19		3452·35	2, 4	1·02	d_r
2856·0	1, 2	1·19		3574·60	1, 2	0·88	
2880·85	1, 2	1·20		3582·0	2, 4	0·81	
2885·25	1, 2	1·12		3601·20	1, 2	1·25	
2893·20	1, 2	1·15		3609·4	1, 2	1·06	
2950·70	1, 2	1·08		3610·5	(2, 3) 4	1·09	
3245·28	2, 4	1·13		3612·53	1, 2	1·18	
3307·05	1, 2	$[1\cdot91]$		3629·00	2, 4	1·71	$d_b \approx z.$
3337·67	5, 10	1·22	2	3637·35	4, 8	1·63	
3344·71	3, 3	0·57		3641·8	1, 2	1·05	

¹ Ily típusokat legelőször BECQUEREL és DESLANDRES észleltek: Observations nouvelle sur le phénomène de Zeeman. Comptes Rendus 127. 1897. 18—24. old.

² Az m összetevők kifelé elmosódtak. A vörös felé eső komponens jobban elmosódott.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg- jegyzések	λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg- jegyzések
3645·57	4, 10	$\pm 0.69 m$	d	4037·35	1, 3	$\pm 0.93 m$	
3649·66	1, 2	1.05		4043·18	5, 10	1.07	d_v
3704·660	1, 2	1.14		4050·25	3, 6	1.11	
3706·02	5, 10	1.63		4058·30	1, 1	[0.90]	
3715·03	3, 6	1.66		4060·52	2, 4	1.22	
3759·33	5, 10	1.36		4064·94	2, 4	1.12	
3773·30	(2, 3) 4	1.08		4067·52	2, 4	1.19	
3780·70	1, 2	0.86		4089·76	2, 4	1.00	
3780·85	1, 2	1.51	1	4099·71	4, 6	0.81	
3791·02	10, 20	1.10		4105·07	2, 4	0.79	
3794·99	10, 20	1.26	d_v	4109·641	1, 2	0.90	
3805·57	1, 3	1.84		4109·965	1, 2	1.09	
3808·89	1, 2	1.30	sz.	4113·55	1, 2	1.17	
3835·29	(3, 2) 4	1.63		4117·836	1, 2	1.06	
3840·92	2, 3	1.14	$d_v, i.$	4123·39	10, 20	1.13	
3849·20	2, 5	0.75		4127·5	(1, 2) 4	1.26	
3855·10	(2, 3) 4	1.61		4133·5	1, 3	1.24	sz.
3864·67	(2, 3) 5	1.21		4141·90	4, 6	1.61	
3871·89	(3, 2) 6	1.19		4187·49	2, 4	1.21	
3886·51	5, 10	1.66	sz.	4192·50	4, 8	1.15	
3910·952	1, 2	1.14		4217·70	4, 6	1.33	
3927·72	(2, 1) 3	0.84		4257·086	1, 2	1.39	
3929·40	4, 6	1.34		4262·510	2, 4	1.26	
3949·22	20, 40	1.24	sz.	4263·73	4, 8	1.20	
3953·2	1, 1	[1.41]	2	4269·65	4, 8	1.28	
3962·3	1, 2	1.20		4280·44	4, 8	1.23	
3963·3	1, 2	0.90	d	4287·09	10, 20	1.22	d_v
3979·3	1, 2	1.43		4296·21	4, 8	1.61	
3988·66	10, 15	1.43		4302·689	1, 2	1.59	
4007·82	1, 2	1.09	d	4306·160	2, 4	1.59	
4015·56	1, 3	1.07	3	4322·69	4, 8	1.18	
4023·72	2, 4	1.16		4337·95	(2, 1) 2	1.14	
4026·03	2, 4	1.44	d_b sz.	4354·54	3, 6	1.16	
4031·86	5, 10	1.25		4363·25	2, 4	1.41	
4035·90	1, 2	1.25		4364·85	3, 6	1.37	
4036·74	3, 6	1.66		4385·37	2, 4	1.32	

¹ A $\lambda=3780.70$ és a $\lambda=3780.85$ vonalak egymást fedik.

² A tisztátalanságok zavarnak; a komponensek nagyon diffusak.

³ A komponensek elmosódott volta több összetevő jelenlétének gyanúját kelti.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg- jegyzések	λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg- jegyzések
4390·060	1, 2	$\pm 1\cdot20\ m$	1	4720·827	3, 6	$\pm 1\cdot12\ m$	
4402·825	1, 1	0·96		4740·433	3, 6	1·07	
4411·45	1, 2	1·20		4748·897	3, 6	1·07	
4424·08	1, 2	1·16		4750·593	1, 2	1·12	
4427·73	3, 5	1·15	d_{bk}	4767·085	2, 4	1·05	
4444·119	(3, 2)4	1·27		4770·629	1, 2	1·00	
4452·338	2, 4	1·06		4809·182	2, 4	0·54	
4491·951	2, 3	1·63		4824·220	4, 4	0·84	
4493·308	2, 4	[1·27]	sz. d_k	4830·682	1, 2	0·82	sz.
4493·986	1, 1	0·78		4839·689	2, 4	0·96	
4499·0	(2, 1)2	1·23		4850·742	[2, 1]2	1·03	
4500·4	3, 6	1·23		4855·110	1, 2	1·31	
4522·61	5, 10	1·11	sz. d_v	4861·062	4, 8	1·28	d
4526·30	5, 10	1·20		4879·020	1, 2	1·19	
4549·682	4, 8	1·14		4900·085	5, 10	0·87	
4552·677	1, 2	0·99		4902·037	1, 2	1·02	
4558·66	4, 8	1·01	d	4921·128	[3, 6]6	1·09	d
4559·51	2, 4	1·80		4921·952	[6, 3]6	1·20	
4565·023	1, 2	[1·53]		4934·999	[2, 3]4	1·05	
4568·15	3, 6	1·33		4949·940	2, 4	0·91	d
4570·28	3, 6	1·43	d	4952·213	2, 4	1·31	
4580·28	3, 6	1·62		4970·552	3, 5	0·93	
4620·06	3, 5	0·74		4991·436	2, 4	0·95	
4646·542	1, 2	0·96	d	4999·641	5, 10	1·36	
4660·907	1, 2	0·99	d	5002·282	[1, 2]3	1·18	
4672·00	2, 4	1·39	sz. d	5114·702	2, 4	0·59	
4692·67	4, 8	1·22		5123·160	2, 4	1·31	
4703·446	5, 8	1·71		5153·584	2, 4	1·53	
4708·350	1, 2	[1·05]	d	5188·374	1, 2	1·27	

E táblázatban foglalt spektrálvonalak ZEEMAN-effektusa a hibahatáron belül valamennyinél szimmetrikus. E tripletek igen különbözök. Még az egymással szomszédos vonalak szétbontásai között is többnyire jelentékeny nagy a különbség. Csupán az ultraibolya vonalak egyenlően szétbontottaknak látszanak. Már fentebb a quadrupleteknél említettük, hogy az alapintervallumok biztos meghatározása a kevés komponensből álló vonalaknál

¹ A vörös felé eső komponens szélesebb és egy fokkal intenzívebb, mint az ibolya felé eső összetevő.

nehézséggel jár. Ez a tripleteknél még csak fokozódik; s mivel ez esetben a komponensek távolsága igen gyakran, a hibahatáron belül különböző intervallummal fejezhető ki, ezért a normális távolság tört részének meghatározása illusorikus. Ez okból az intervallumokat nem állapítottam meg. Ugyanezen okból igen fáradságos és úgyszólván reménytelennek látszik a tripletek között egy és ugyanazon serieshez tartozók felkérésése is. Mindazonáltal ezt megkíséréltem, de eredmény nélkül.

A lanthánvonalak között határozottan dissymmetrikusan szétbomló vonalakat nem találtam. A következő táblázatban ama vonalakat közlöm, a melyeknél kiscsök dissymmetriát észleltem:

XV. táblázat.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Megjegyzések	λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Megjegyzések
4137·182	2	$-1·32\ m$	A v össze- tevő egy kevésbé diffus	4194·57	2	$-1·18\ m$	A v komp. elmosódott
	4	$-0·04\ p$			4	$+0·04\ p$	
	2	$+1·37\ m$			2	$+1·13\ m$	
4160·43	4	$-1·83\ m$	„	4204·23	2	$-1·57\ m$	
	8	$-0·03\ p$			4	$+0·03\ p$	
	4	$+1·87\ m$			2	$+1·62\ m$	
4171·88	4	$-1·75\ m$		4442·839	2	$-2·17\ m$	
	2	$-0·04\ p$			3	$0\ p$	
	4	$+1·80\ m$			1	$+1·75\ m$	

Lehetséges, hogy a $\lambda = 4442·839$ vonalnál fellépő nagyfokú dissymmetria egy, a tisztátalanságokhoz tartozó, vonal jelenlétele folytán származott. E vonal közelében ugyanis ily tisztátalanságok nagy számban vannak.

Kobalt.

A kobaltnál csupán a fővonalak ZEEMAN-effektusának vizsgálatára szorítkoztam. Ugyanis daczára annak, hogy ama különböző kémiai praeparatumok, a melyeket vizsgálataimnál felhasználtam, a nagy gyáraktól kapható legtisztábbak közé tartoztak, mindazonáltal azok e finom spektroskopiai kutatásra alkalma-

soknak (tisztáknak) nem bizonyultak, mert a hosszabb ideig tartó expositióval nagy mértékben fellépő tisztátalanságok teljesen megakadályoztak abban, hogy a gyengébb vonalak magatartását is vizsgálat alá vegyem.¹

A következő kobaltvonalak mindenike tíz komponensre bomlik:

XVI. táblázat.

3385·39			3388·32			3463·01		
<i>i</i>	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	<i>A</i>	<i>i</i>	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	<i>A</i>	<i>i</i>	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	<i>A</i>
2	+ 2·70 <i>m</i>	18×0·145 $\left(\frac{a}{8}\right)$	3	+ 2·07 <i>m</i>	24×0·088 $\left(\frac{a}{12}\right)$	5	+ 1·75 <i>m</i>	7×0·25 $\left(\frac{3a}{13}\right)$
1	+ 2·16 <i>m</i>	15	2	+ 1·45 <i>m</i>	17	3	+ 1·24 <i>m</i>	5
3	+ 1·48 <i>p</i>	10	3	+ 0·89 <i>p</i>	10	5	+ 0·78 <i>p</i>	3
3	+ 0·88 <i>p</i>	6	1	+ 0·83 <i>m</i>	10	1	+ 0·71 <i>m</i>	3
3	+ 0·28 <i>p</i>	2	4	+ 0·34 <i>p</i>	4	5	+ 0·26 <i>p</i>	1
3	− 0·28 <i>p</i>		4	− 0·34 <i>p</i>		5	− 0·26 <i>p</i>	
3	− 0·88 <i>p</i>		1	− 0·80 <i>m</i>		1	− 0·74 <i>m</i>	
3	− 1·46 <i>p</i>		3	− 0·90 <i>p</i>		5	− 0·79 <i>p</i>	
1	− 2·16 <i>m</i>		2	− 1·44 <i>m</i>		3	− 1·25 <i>m</i>	
2	− 2·70 <i>m</i>		3	− 2·09 <i>m</i>		5	− 1·76 <i>m</i>	

E tíz komponens az összes komponenseket tartalmazó lemezen csupán a 3385·39 vonalnál volt egymástól jól elválasztva. A 3388·32 és a 3463·01 vonalak belső *m* komponenseit csupán a különböző fajta rezgések szétválasztásakor és még hozzá csak igen hosszú expositióval találtam fel. A 3385·39 vonalnál e gyenge *m* rezgéseknek megfelelő komponens a komponensek szétválasztásával és hosszú megvilágítással sem sikerült észlelnem. A 3385·39 vonalnak hat *p* és négy *m* komponense van. A belső *m* komponens igen gyenge és ezért nehezen mérhető.

¹ A kobalttra vonatkozó észlelésekhez a következő megjegyzést kell fűznöm: Ha az elektromágnes pólusai közé kobaltfémlelektrodot teszünk, e ferromágneses test a mágneses tér intenzitását megváltoztatja, mely befolyás a ZEEMANN-effektusnál is észrevehető lesz. E befolyásra KÖRNER K. úr, ki ezt a vas spektrálvonalak ZEEMAN-effektusára vonatkozó vizsgálatainál észlelte, volt szíves figyelmeztetni. Észleléseim az általa közölt adatokkal vannak a RUNGE-féle erőtérré redukálva.

Mindazonáltal szemmel is észrevehető, hogy e vonal a szélsők-höz közelebb fekszik úgy, miként az a táblázatból is kitűnik. Ez oknál fogva az m komponensek frequentiadifferentiája nem fele a külső m és szélső p komponens közötti távolságnak, mely a p összetevők intervallumának a kétszerese. A p komponensek a szomszédos p összetevőktől valamennyien $0.58 \left(\frac{4a}{8} \right)$ távolságra vannak, az m komponensek rezgésszámdifferentiája ellenben $0.44 \left(\frac{3a}{8} \right)$. Tehát az m és a p rezgések intervalluma különböző. A XVI. táblázat másik két vonalának hat m és négy p komponense van. E vonalak a komponensek intenzitását illetőleg hasonlóak; a p összetevők egy és ugyanazon vonalnál egyező erősségűek, az m -ek intenzitása azonban befelé csökken. A 3388.32 vonal komponenseinek távolsága $0.088 \left(\frac{a}{12} \right)$ intervallummal fejezhető ki. Az m összetevők æquidistansok, ellenben a p komponensek egymástóli távolsága nem egyenlő: a belsőké nagyobb. A 3385.39 vonal p komponenseinek távolságkülönbségei között a $0.58 \left(\frac{a}{2} \right)$ intervallum öt ízben, a 3388.32 vonal m összetevőinél a $0.62 \left(\frac{7a}{12} \right)$ pedig négyszer fordul elő. A 3463.01 vonal összes komponensei az eredeti spektrálvonal helyéhez teljesen szimmetrikusan csoportosulnak. Mind a két oldalon egy p rezgés egy (belső) m rezgéssel egyező rezgésszámú. Az összes vonalaknak a szomszédosaktól való távolsága közös — az alapintervallum kétszerese — miért is a $0.50 \left(\frac{6a}{13} \right)$ intervallum a komponensek frequentiakülönbsége között kilencszer szerepel.

A következő vonalaknak nyolcz komponensük van:

XVII. táblázat.

3495·89			3550·75		
<i>i</i>	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	<i>A</i>	<i>i</i>	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	<i>A</i>
2 <i>d</i>	+ 1·27 <i>m</i>	15×0·086 $\left(\frac{a}{12}\right)$	3	+ 2·03 <i>m</i>	6×0·328 $\left(\frac{3a}{10}\right)$
1	+ 0·97 <i>m</i>	11	1	[+ 1·38] <i>m</i>	4
3	+ 0·51 <i>p</i>	6	2	+ 0·98 <i>p</i>	3
3	+ 0·18 <i>p</i>	2	3	+ 0·32 <i>p</i>	1
3	— 0·18 <i>p</i>		3	— 0·32 <i>p</i>	
3	— 0·52 <i>p</i>		2	— 0·98 <i>p</i>	
1	— 0·98 <i>m</i>		1	[— 1·38] <i>m</i>	
2 <i>d</i>	— 1·26 <i>m</i>		3	— 2·05 <i>m</i>	

3704·24		
<i>i</i>	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	<i>A</i>
2 <i>d</i>	+ 1·90 <i>m</i>	17×0·111 $\left(\frac{a}{10}\right)$
1	[+ 1·56] <i>m</i>	14
3	+ 0·53 <i>p</i>	5
3	+ 0·23 <i>p</i>	2
3	— 0·21 <i>p</i>	
3	— 0·60 <i>p</i>	
1	[— 1·54] <i>m</i>	
2 <i>d</i>	— 1·85 <i>m</i>	

E spektrálvonalak között nincs duplikatum. Némi hasonlóság látszik a 3495·89 és a 3550·75 vonal szétbontása között, a 3704·24 vonalé azonban ezektől teljesen eltér. Mind a három spektrálvonal különösen a 3704·24 vonal komponensei igen közel fekszenek egymáshoz, úgy hogy az összetevők szétbontása nagy erőternél volt csak lehetséges. Különösen nagy nehézséggel járt a belső *m* összetevőket elég jól mérhetőleg felvennem. Ez összetevők ugyanis kis intenzitásúak, továbbá a diffus szélső *m* komponensekhez igen közel fekszenek. A két első vonalnál a *p* komponensek egymástóli távolsága úgy egymással, mint pedig az *m* összetevők egymástóli távolságával egyenlőnek adódott. A 3704·24 vonalnál a szélső és a belső *p* rezgés rezgésszámának a különbsége ugyan az *m* összetevők távolság-

különbségével egyenlő, de ez intervallum a belső p komponensek egymástóli távolságánál kisebb. Az alapintervallumok mindhárom vonalnál különbözők. A 3495·89 vonalnál a $0\cdot34 \left(\frac{a}{3}\right)$ intervallum, a 3550·75-nál pedig a $0\cdot66 \left(\frac{3a}{5}\right)$ távolság öt-öt ízben fordul elő. A 3495·89-hoz hasonló típusra bomlik a 3998·10 kobaltvonal is.

A következő három vonal a mágneses erőter folytán hét-hét összetevőre bomlik:

XVIII. táblázat.

3491·51			3561·06		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
1	$+1\cdot72\ m$	$4\times 0\ 432 \left(\frac{2a}{5}\right)$	2	$+1\cdot71\ m$	$4\times 0\ 432 \left(\frac{2a}{5}\right)$
3	$+1\cdot27\ p$		5	$+1\cdot31\ p$	
1	$+0\cdot86\ m$		2	$+0\cdot89\ m$	
2	$-0\cdot02\ m$	0	3	0 m	0
1	$-0\ 85\ m$		2	$-0\ 87\ m$	
3	$-1\cdot27\ p$		5	$-1\cdot31\ p$	
1	$-1\cdot71\ m$		2	$-1\cdot73\ m$	

3941·05		
i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A
2	$+1\cdot72\ m$	$4\times 0\ 432 \left(\frac{2a}{5}\right)$
5	$+1\cdot26\ p$	
2	$+0\cdot86\ m$	
3	$+0\ m$	0
2	$-0\ 85\ m$	
5	$-1\cdot26\ p$	
2	$-1\cdot69\ m$	

E három vonal ZEEMAN-effektusa, miként e táblázatból kitetszik, egymással fényesen egyezik. A szétbontás különös és egymással rendkívüli módon egyező karaktere azonnal az effektusok felvétele után, még ezek felmérése előtt is felhívták a figyelmet, de a szétbontás teljes azonossága csupán a frequentia-

különbségek meghatározásánál derült ki. E három vonal a szétbontás legkisebb részleteit tekintve tökéletesen megegyezik egymással.

Nemcsak a komponenseik intenzitásának eloszlása, nemcsak ezek frekvenciakülönbségei azonosak, hanem ezen összetevők élessége, elmosódott volta, intenzitási árnyalatai is mind a három vonalnál minden tekintetben megegyeznek. Mindhárom vonalnál egy m rezgés jut az eredeti spektrálvonal helyére, melyhez jobbra és balra úgy ettől, mint egymástól is egyenlő távolságra még két-két m rezgés csatlakozik. A vonalaknak az öt m rezgésen kívül még két p rezgésük van, melyek az előzőkhez szimmetrikusan, a szélső m rezgések közé, azoktól egyenlő távolságra esnek. A komponensek intenzitásbeli eloszlása mind a három vonalnál teljesen szimmetrikus. A p rezgések intenzitása egy fokkal nagyobb, az egymással egyező erősségű két-két szélső m összetevőé ellenben egy fokkal kisebb a középső m komponens intenzitásánál. Az alapintervallum $0.432 \left(\frac{2a}{5} \right)$, melynek 0, 2, 3 és 4-szerese az összetevők távolságát adja.

A három vonal intenzitása a sorozatok törvényének megfelelően a hullámhosszal csökken, illetve pontosabban a 3941.05 és a 3561.06-é egyenlő erősségű, a 3491.51 intenzitása azonban ezekénél egy fokkal kisebb. Ehhez járul, hogy e három vonal által definiált esetleges sorozat tagjai a spektrum ibolyarésze felé sűrűsödnek össze. Mindezek alapján biztos, hogy a három vonal egy és ugyanazon sorozathoz tartozik. A sorozat megállapításához azonban legalább is négy azonosan szétbomló vonalra van szükségünk. Ezek közül három a sorozatot állapítja meg, a negyedik pedig a négy vonal egy sorozathoz tartozó voltát, vagyis azt igazolja, hogy ez utóbbi vonal frekvenciája a három első rezgésszáma által meghatározott sorozatformának eleget tesz. Az egész spektrumban azonban több ezekkel azonosan szétbomló vonalat nem találtam. Lehetséges, hogy a sorozat tagja lejjebb az ultraibolya felé fekszenek és

csupán azok intenzitásának kicsiny volta, főleg pedig a szükséges hosszú expositióval nagy mértékben előnyomuló tisztátalanságok zavaró hatása volt oka annak, hogy a közölt három vonalon kívül csak typust illetőleg is több ilyenmű szétbontást mutató spektrálvonalat nem találtam. Mindazonáltal a series felkeresését különböző seriesformákkal megkíséreltem, de eredmény nélkül.

A következő vonalak quadrupletek:

XIX. táblázat.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	Észrevételek
3409·35	8	+ 1·25 m	$13 \times 0·093 \left(\frac{a}{11} \right)$ 3	A szélső komponensek diffusak és vastagok; a p rezgések élesek
	10	+ 0·27 p		
	10	— 0·27 p		
	8	— 1·25 m		
3417·30	3	+ 1·02 m	$7 \times 0·151 \left(\frac{a}{7} \right)$ 2	Az m összetevők kissé diffusak és szélesek
	5	+ 0·31 p		
	5	— 0·31 p		
	3	— 1·01 m		
3446·52	2	+ 1·15 m	$6 \times 0·192 \left(\frac{2a}{11} \right)$ 1	
	2	+ 0·18 p		
	2	— 0·19 p		
	2	— 1·14 m		
3455·40	2	+ 0·62 m	$3 \times 0·216 \left(\frac{a}{5} \right)$ 1	Az m összetevők igen erősen diffusak, szélesek, de azért elég élesen határoltak; A p komponensek élesek.
	3	+ 0·23 p		
	3	— 0·21 p		
	2	— 0·65 m		
3523·62	3	+ 0·64 m	$3 \times 0·216 \left(\frac{a}{5} \right)$ 1	A 3455·40 észrevételei szórul szóra érvényesek
	4	+ 0·23 p		
	4	— 0·21 p		
	3	— 0·65 m		
3585·31	2	+ 1·46 m	$8 \times 0·183 \left(\frac{a}{6} \right)$ 3	Az m összetevők diffusak
	4	+ 0·55 p		
	4	— 0·54 p		
	2	— 1·47 m		

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	Észrevételek
3605·51	2	+ 1·25 m	$8 \times 0.157 \left(\frac{a}{7}\right)$	
	2	+ 0·15 p	1	
	2	— 0·17 p		
	2	— 1·24 m		
3750·10	2	+ 1·29 m	$7 \times 0.182 \left(\frac{a}{6}\right)$	
	4	+ 0·17 p	1	
	4	— 0·18 p		
	2	— 1·29 m		
3877·01	2	+ 1·26 m	$9 \times 0.14 \left(\frac{a}{8}\right)$	
	4	+ 0·55 p	4	
	4	— 0·56 p		
	2	— 1·25 m		
3895·12	3	+ 0·65 m	$3 \times 0.216 \left(\frac{a}{5}\right)$	A 3455·40 észrevételei szórul szóra érvényesek
	4	+ 0·22 p	1	
	4	— 0·22 p		
	3	— 0·65 m		
3917·26	2	+ 1·27 m	$11 \times 0.115 \left(\frac{a}{9}\right)$	
	3	+ 0·23 p	2	
	3	— 0·23 p		
	2	— 1·27 m		
3973·32	3	+ 1·53 m	$5 \times 0.313 \left(\frac{2a}{7}\right)$	Igen gyenge mérés
	3	+ 0·32 p	1	
	3	— 0·32 p		
	3	— 1·53 m		
3990·50	1	+ 1·19 m	$4 \times 0.27 \left(\frac{a}{4}\right)$	Erősen dissymmetrikus
	1	+ 0·27 p	1	
	1	— 0·27 p		
	1	— 1·11 m		
4517·26	1	+ 1·97 m	$9 \times 0.22 \left(\frac{a}{5}\right)$	
	1	+ 0·88 p	4	
	1	— 0·88 p		
	1	— 1·98 m		
4629·54	3	+ 1·58 m	$14 \times 0.113 \left(\frac{a}{10}\right)$	Dissymmetrikus
	4	+ 0·36 p	3	
	4	— 0·33 p		
	3	— 1·61 m		

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	A	Észrevételek
4663·62	2	+ 1·60 m	$13 \times 0·124 \left(\frac{a}{9}\right)$ 4	Az m összetevők diffusak.
	3	+ 0·50 p		
	3	— 0·51 p		
	2	— 1·59 m		

E quadrupletek között ismét három vonalat: a 3455·40, 3523·62 és 3895·12 találunk, melyet a mágneses erőter azonosan bont szét. Mindaz, a mit a XVIII. táblázat spektrálvonalai effektusának teljes megegyezésére mondtam, a változtatandók megváltoztatásával a jelen esetben is *szórul-szóra* érvényes. Mind a három vonal p rezgése igen éles, az m rezgések ellenben szélesek és egy kissé diffusak, de azért élesen határoltak. A komponensek egymástól távolsága mind a három esetben teljesen egyenlő. E távolság a XVIII. táblázat alapintervallumával feltűnésszerűen megegyezik. A septetek intervalluma a quadrupletek intervallumának kétszerese s így mind a hat vonal egy és ugyanazon intervallumhoz tartozik, csupán a septetek faktorait kell megkészszerelnünk. A három quadrupletre bomló vonal intenzitása a hullámhosszal csökken, pontosabban kifejezve a két nagyobb hullámhosszúságú vonal intenzitása egyenlő, a harmadiké ezeknél kisebb. Tehát ugyanaz az intenzitáseloszlás érvényes itt is, mint a minőt a septetek intenzitáseloszlására nézve találtunk. A 3895·12, 3523·62 és 3455·40 vonalak az ibolya felé sűrűsödnek össze. Az itt mondtak alapján megállapítható, hogy e vonalak egy és ugyanazon serieshez tartoznak. De a quadrupletekre és septetekre bomló vonalak alapintervallumának megegyezéséből még több is következik. A két seriesnek egymással vonatkozásban kell lennie. E véleményt támogatja az alábbi táblázat, melynek első négy oszlopa a quadrupletekre, a további négy oszlopa pedig a septetekre bomló vonalak hullámhosszát, intenzitását, rezgés-

számát és két egymás fölött álló vonal rezgésszámdifferentiáját tartalmazza:¹

XX. táblázat.

λ	i	n	D_1	λ	i	n	D_2
3455.40	3	28940.2	560.3	3491.51	3	28640.9	559.4
3523.62	5	28379.9	2706.8	3561.06	4	28081.5	2707.6
3895.12	5	25673.1		3941.05	4	25373.9	

E táblázatból látható, hogy a D_1 oszlopban lévő differentiák a D_2 különbségekkel elég jól egyeznek. *Tehát úgy a quadrupletekre, mint a septetekre bomló három-három vonal egy-egy series tagja. E seriesek bizonyos kapcsolatban vannak egymással: természetük olyan, mint a minőt a parallel seriesek mutatnak.*

A következő vonalak tripletek:

XXI. táblázat.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg-jegyzések	λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg-jegyzések
3378.91	1, 2	$\pm [0.96] m$		3483.60	2, 4	$\pm 1.50 m$	
3395.56	(4, 5) 10	1.21	2	3485.53	2, 4	1.18	
3405.30	5, 10	1.41		3489.61	4, 8	1.17	
3412.49	2, 4	1.06		3502.46	3, 6	1.33	
3424.01	1, 2	0.55		3506.50	2, 4	1.14	
3431.78	3, 9	1.08	d_k	3510.03	2, 4	1.11	
3433.25	4, 5	0.46		3512.83	4, 8	0.93	2
3443.09	2, 8	0.92	2	3513.65	2, 4	1.12	
3452.5	1, 2	1.33		3518.52	3, 6	0.96	
3453.70	8, 10	1.22	sz.			$-1.56 m$	
3461.35	2, 4	1.25	d	3520.25	(3, 2) 4	0 p	d sz.
3466.00	5, 8	1.22	sz.			$+1.64 m$	
3471.55	1, 2	1.30	d	3521.75	3, 4	1.70	sz. d
3474.24	5, 10	1.43	sz. d_b	3527.02	2, 4	1.41	

¹ Az i oszlop számadatai az EXNER és HASCHEK-féle táblázatból vannak véve.

² A p összetevő széles és ama gyanút kelti, hogy több összetevőből áll. Mathematikai és Physikai Lapok. XX.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg- jegyzések	λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg- jegyzések
3527·19	1, 2	$\pm 0·99 m$		3861·35	4, 8	$\pm 0·99 m$	
3529·99	3, 6	1·00	sz.	3870·70	2, 3	0·81	
3533·50	2, 8	0·71		3873·30	20, 40	1·17	
3543·40	1, 2	1·05		3874·14	10, 20	1·16	
3565·11	1, 8	0·74	sz.	3882·04	4, 8	0·96	
3569·59	2, 4	1·20		3894·26	20, 40	1·06	
3572·05	2, 4	1·07		3910·10	2, 6	1·43	
		$-1·31 m$		3922·90	1, 2	0·86	
3575·54	2, 4	$0 p$		3936·17	4, 8	1·83	A p össz.
		$+1·35 m$		3941·89	3, 8	1·18	sz.
3587·35	4, 8	0·92		3945·50	2, 4	1·66	d
3595·02	2, 4	1·09		3961·15	1, 2	1·00	
3602·23	2, 5	0·43		3969·30	2, 6	1·22	
3611·86	(2, 4) 4	0·96		3972·72	2, 4	[1·22]	
3631·56	2, 4	1·54		3977·35	1, 2	[1·39]	
3632·99	1, 2	1·19		3978·80	(3, 2) 4	1·06	
3634·85	(3, 2) 4	0·89		3979·70	2, 4	1·43	
3641·90	1, 3	1·40		3995·53	6, 12	1·21	
3643·31	1, 2	1·14		4021·06	3, 8	1·39	
3649·45	1, 2	1·12		4027·16	1, 2	1·39	
3652·69	2, 4	1·55	sz.	4035·69	2, 6	1·17	
3662·34	2, 4	1·19		4045·54	2, 8	1·39	
3676·72	3, 6	1·10		4053·09	1, 2	1·38	
3683·24	4, 8	1·30		4058·35	1, 2	1·26	
3684·64	1, 2	1·45		4058·76	3, 3	1·30	
3693·30	2, 4	1·12		4068·69	2, 6	1·67	
3693·66	2, 6	1·15		4086·49	4, 8	1·38	
3702·44	4, 8	0·99		4092·58	4, 8	1·25	
3708·99	2, 4	1·18		4110·70	2, 4	0·94	
3730·64	4, 8	1·42		4115·94	10, 20	1·21	
3732·59	4, 8	1·64	sz.	4121·51	10, 20	1·17	
3733·65	2, 6	1·22		4467·10	2, 4	1·49	
3734·30	1, 4	1·13		4469·77	4, 8	1·54	
3736·08	2, 6	1·51		4471·73	(2, 1) 3	$-1·15 m$	
3754·85	2, 2	1·29				$0 p^1$	
3755·59	2, 4	1·49				$+1·32 m$	
3841·60	1, 3	0·71		4531·20	4, 8	$-1·59 m$	
3842·25	10, 20	1·15				$0 p$	
3845·65	50, 100	1·27				$+1·52 m$	
3858·43	2, 4	1·23		4534·19	2, 4	1·60	
				4544·00	2, 4	1·29	

¹ A dissymmetriát valószínűleg egy tisztátalanság okozza.

λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg- jegyzések	λ	i	$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$	Meg- jegyzések
4549·85	3, 6	$\pm 1·55 m$		4594·81	2, 4	$\pm 1·49 m$	
4565·83	4, 8	1·54				$-1·37 m$	
4581·82	5, 10	1·54		4597·09	(1, 2) 3	0 p $+1·33 m$	

A megvizsgált elemek összehasonlítása.

A jelen paragrafusban az előzőekben részletesen ismertetett eredményekre támaszkodva a megvizsgált vonalakat először egymás között hasonlítom össze, azután pedig azon típusokra utalok, a melyek a lanthán és ezzel kémiaiilag rokon yttrium és bárium ZEEMAN-effektusánál is közösen fellépnek.

Az egy és ugyanazon elem spektrálvonalainak egymásközötti összehasonlítása nagyrésztben már a vonalak viselkedésének ismertetésénél is megtörtént. Ez összehasonlítás alapját a komponensek száma és ezek tipikus elrendezési módja képezte. Már itt ezen összehasonlításnál kiderült, hogy a különböző számú komponenseket tartalmazó, tehát a különböző csoportba tartozó vonalak effektusa között a frekuensiakülönbség tekintetében is többször némi azonosság jelentkezik. Az azonosság még feltűnőbbé válik, ha tekintetbe vesszük azt, hogy a különböző számú komponenseket tartalmazó spektrálvonalaknál az összetevők távolsága sokszor a normális szétbontás egy és ugyanazon tört részének sokszorosaiaként volt előállítható. Természetesebb és sokkal célszerűbb tehát a szétbontás nagyságát az összehasonlítás alapjául venni s a vonalakat e szerint, közelebből pedig e szétbontást jellemző alapintervallum szerint csoportosítani. A következőkben tehát a normális szétbontás tört részének alapul vételével az egy és ugyanazon intervallummal jellemzett vonalakat foglalom össze. De ezen összehasonlításnál fel kell említenem azt, mire már a megelőző tárgyalások folyamán is több ízben utaltam, hogy az intervallum teljes biztos meghatározása csupán a sok komponenst számláló vonalaknál lehetséges. Minél nagyobb a komponensek száma, annál

jobban domborodik ki ezek frequentiakülönbségét jellemző közös intervallum. A kevés számú komponensekből álló vonalaknál, így a quadrupleteknél a komponensek távolsága néha-néha különböző résztörttel fejezhető ki, a nélkül, hogy a komponensek távolságaként ez intervallumok által nyert értékek a mérési hiba határán túl mennének. A viszonyok a tripleteknél még kedvezőtlenebbek, miért is ezeknek az alapintervallumok szerinti csoportosítását, mint olyant, melynek úgy sincs értelme, nem is végzem.

A következő táblázatban a háromnál több komponensre bomló lanthán- és kobaltvonalak az alapintervallumok szerint vannak csoportosítva:

XXII. táblázat.

Az alap-intervallum	Az alapintervallum tényezői	Az előforduló vonalak száma	Az elem, a melyhez e típus tartozik	λ
$\frac{a}{2}$	4, 3, 2, 2, 1, 1	1	<i>La</i>	4575·08
	5, 3, 2, 0	1	<i>La</i>	3193·09
	3, 2, 1, 0	1	<i>La</i>	3104·76
	2, 1, 1, 0	1	<i>La</i>	3249·49
	1, 1, 0	1	<i>La</i>	4691·344
	5, 2, 0	1	<i>La</i>	3621·96
	3, 2, 1	1	<i>La</i>	3303·26
$\frac{a}{3}$	5, 4, 2, 1, 0	1	<i>La</i>	4076·89
$\frac{4a}{3}$	1, 1	1	<i>La</i>	4615·240
$\frac{a}{4}$	4, 1	1	<i>La</i>	4419·30
	4, 1	1	<i>Co</i>	3990·50
$\frac{a}{5}$	9, 4	1	<i>Co</i>	4517·26
	7, 1	1	<i>La</i>	4455·99
	5, 3	1	<i>La</i>	4311·902
	5, 2	1	<i>La</i>	4571·144
	5, 1	3	<i>La</i>	4333·97, 4636·60 4663·97
	5, 2	1	<i>La</i>	4378·24
	3, 1	3	<i>Co</i>	3455·40, 3523·62 3895·12

Az alap-intervallum	Az alapintervallum tényezői	Az elő-forduló vonalak száma	Az elem, a melyhez e típus tartozik	λ
$\frac{2a}{5}$	4, 3, 2, 1, 0	1	La	3381·10
	4, 3, 2, 0	3	Co	3491·51, 3561·06 3941·05
$\frac{a}{6}$	13, 11, 4, 2, 0	1	La	3713·71
	13, 9, 5, 4, 0	1	La	4716·594
	10, 8, 6, 4, 4	2	La	4238·57, 4250·17
	10, 8, 6, 4, ?	1	La	4231·10
	? ? 3, 1	1	La	4433·15
$\frac{a}{6}$	8, 3	1	Co	3585·31
	7, 3	1	La	3994·67
	7, 2	2	La	3736·6, 4655·71
	7, 1	1	Co	3750·10
$\frac{a}{7}$	11, 8, 6, 5, 2	1	La	3650·31
	8, 1	1	Co	3605·51
	7, 2	1	Co	3417·30
$\frac{2a}{7}$	5, 1	1	Co	3973·32
$\frac{a}{7}$	4, 1	2	La	3846·16, 4650·528
$\frac{a}{8}$	18, 15, 10, 6, 2	1	Co	3385·39
	10, 7, 4, 3, 0	1	La	4077·51
	12, 7, 5	1	La	4605·99
	9, 4	1	Co	3877·01
	7, 2	1	La	3995·91
$\frac{3a}{8}$	5, 4, 2, 1, 0	1	La	4669·10
	5, 4, 1, 0	1	La	4727·5
	5, 3, 2, 0	1	La	4474·716
	4, 3, 1, 0	1	La	4275·80
	2, 1	1	La	4550·948
$\frac{a}{9}$	13, 10, 7, 6, 3	1	La	4152·97
	12, 8 ? 4, 0	1	La	4430·11
	13, 4	1	Co	4663·62
	11, 2	1	Co	3917·26
	5, 4	1	La	4648·844
$\frac{2a}{9}$	9, 7, 4, 2, 0	1	La	4383·62
	3, 2	1	La	4494·869
$\frac{a}{10}$	14, 11, 8, 6, 5, 4	1	La	4196·74
	17, 14, 5, 2	1	Co	3704·24
	9, 5, 4	1	La	3916·21
	8, 5, 3	1	La	4152·17
	14, 3	1	Co	4629·54
$\frac{3a}{10}$	6, 4, 3, 1	1	Co	3550·75
	5, 4, ? ?	1	La	3936·40

Az alap-intervallum	Az alapintervallum tényezői	Az előforduló vonalak száma	Az elem, a melyhez e típus tartozik	λ
$\frac{a}{11}$	20, 17, 13, 9, 7	1	<i>La</i>	3715·67
	13, 3	1	<i>Co</i>	3409·35
	11, 9	1	<i>La</i>	4423·37
$\frac{2a}{11}$	13, 11, 6, 3, 0	1	<i>La</i>	4316·04
	8, 5, 3	1	<i>La</i>	4804·218
	6, 1	1	<i>Co</i>	3446·52
	5, 2	1	<i>La</i>	3981·55
$\frac{3a}{11}$	3, 1	1	<i>La</i>	4086·90
$\frac{4a}{11}$	5, 4, 2, 1, 0	1	<i>La</i>	3725·24
	3, 1	1	<i>La</i>	4827·031
$\frac{5a}{11}$	5, 4, 2, 1, 0	1	<i>La</i>	4713·081
$\frac{6a}{11}$	2, 1, 1	1	<i>La</i>	3513·06
	2, 1	1	<i>La</i>	4645·46
$\frac{8a}{11}$	3, 2, 2, 1, 1, 0	1	<i>La</i>	4300·59
$\frac{a}{12}$	24, 19, 14, 9, 8	1	<i>La</i>	3265·79
	24, 17, 10, 10, 4	1	<i>Co</i>	3388·32
	15, 11, 6, 2	1	<i>Co</i>	3495·89
$\frac{2a}{13}$	5, 1	1	<i>La</i>	3784·96
$\frac{3a}{13}$	7, 5, 3, 3, 1	1	<i>Co</i>	3463·01
$\frac{6a}{13}$	3, 2, 1, 0	1	<i>La</i>	4986·989
$\frac{a}{14}$	21, 20	1	<i>La</i>	4615·240
$\frac{3a}{14}$	9, 7, 4, 2, 0	1	<i>La</i>	4383·62
$\frac{6a}{14}$	5, 4, 2, 1, 0	1	<i>La</i>	4647·64

Már az előző tárgyalások folyamán is említettem azt, a mi e táblázatos összeállításból még jobban kitűnik, hogy ez elemek teljesen azonosan szétbomló vonalainak száma igen csekély. A legtöbb típus csupán egyetlenegy példánnyal van képviselve. Elvértve találunk két és igen ritkán három azonosan szétbomló vonalat. De az egy és ugyanazon alapintervallum által definiált

ama vonalak száma, a melyek effektusánál bizonyos faktorok közösen szerepelnek s melyek oly természetűek, hogy a hiányzó komponensek okául talán ezek intenzitásának kicsiny voltát tekinthetjük, szintén csekély. Ezek alapján e vonalak között esetleg létező törvényszerűségek felismerésére kevés reményünk lehet.

A táblázatos összeállítás pusztá megtekintése is meggyőző bennünket arról, hogy a lanthán- és a kobaltvonalak ZEEMAN-effektusa egymástól lényegesen eltér, mint a mi a két elem egymástól teljesen eltérő kémiai karaktere alapján várható is volt. A kobalt tiz és nyolcz komponensből álló típusaihoz, de még inkább a kobaltra jellemzőnek talált hét összetevőből álló effektusokhoz még csak hasonlót sem lehet a lanthánvonalak szétbontásai között találni. A 3455·40, 3523·62 és 3895·12 kobaltvonalak jellemzetes szétbontása a lanthánvonalaknál szintén nem fordul elő. Ép így viszont a lanthánvonalak jellemző típusait a kobaltnál se találjuk meg.

Miután a lanthánspektrálvonalak nagyrészének e magneto-optikai viselkedése ismeretes, kíváncsok, hogy ez elem vonalait az azonos magatartás alapján a vele kémiai rokonságban álló elemek vonalaival is hasonlítsuk össze. Várható, hogy az elemek kémiai rokonsága magában a spektrumban, közelebből pedig a vonalak ZEEMAN-effektusában is kifejezést nyer.

A lanthánnal kémiaiilag rokon, tehát a periodikus rendszer ugyanazon — harmadik — osztályába tartozó, továbbá e rendszerben a lanthánnal parallel fekvő elemek közül az yttrium,¹ a thallium² és a bárium¹ bizonyos spektrálvonalainak ZEEMAN-effektusa ismeretes. A következőkben tehát a lanthán és az utóbbi elemek ZEEMAN-effektusát hasonlítom össze.

A lanthán 4575·08 vonala, mely tizenkét összetevőre bom-

¹ B. E. MOORE: Über die Zerlegung der Spektrallinien von Barium, Yttrium u. s. w. in magn. Felde. Inaug. Diss. Göttingen, 1907. Annalen d. Physik 1908 (4). 25. 309.

² C. RUNGE und F. PASCHEN: Abh. der Berliner Akademie 1902. 720.

lik, e magnetooptikai viselkedés tekintetében az ugyancsak tizenkét komponensre bomló 3818·49 yttriumvonallal nagymérvű hasonlóságot mutat. Ez yttriumvonál tizenkét komponense közül nyolcz szintén az erővonalakra merőleges rezgésű; ez összetevők az eredeti spektrálvonal helyétől jobbra és balra szintén szimmetrikusan és egymástól egyenlő távolságra (0·433) vannak. A négy p rezgés épúgy, mint az említett lanthánvonál négy p rezgése, a belső négy m rezgéssel azonos rezgésszámú. Az alapintervallumok — az yttriumnál 0·433, lanthánál 0·52 — különbözők, de ezek faktorai mind a két esetben teljesen egyenlők: (1, 1, 2, 2, 3, 4). Tehát a két vonal komponenseinek távolsága egymással arányos. A két vonalnál az összetevők intenzitáseloszlása is azonos. Igen szép azonosság jelentkezik a 3921·71 lanthán- és a 3628·89 yttriumvonál ZEEMAN-effektusa között. E két vonal a hibahatáron belül minden tekintetben: az összetevők intenzitását és ezek frekvenciakülönbségét is illetőleg teljesen azonosan bomlik szét. A 4946·60 lanthánvonál ZEEMAN-effektusa ugyancsak a 3628·89 yttriumvonál effektusával teljesen azonosnak látszik. A lanthánvonálnál azonban, a mely e megfelelő yttriumvonálnál jóval gyengébb, a belső igen gyenge m komponens hiányzik. Ez összetevő, miként az az előző tárgyalások folyamán is jelezve volt, valószínűleg annak igen kis intenzitása miatt nem volt észlelhető. A 3381·10 lanthánvonál talán a 4398·21 yttriumvonálnak felel meg. Ez yttriumvonál ép úgy, mint az említett lanthánvonál a spektrum legerősebb vonalai közé tartozik. A két vonal komponenseinek fekvése és ezek intenzitása teljesen azonos. A szélső m összetevő az yttriumvonálnál is elmosódottnak van jelölve. A frekvenciakülönbségek között azonban, ha mindjárt nem is nagy, de némi eltérés van. Ez eltérés, a melynek maximális értéke 0·06 az m és p komponenseknél ellentett irányú, miért is a szétbontás teljesen azonosnak nem mondható. A 3193·09 lanthán- és a 4199·46 yttriumvonalak szintén megfelelőek. E vonalak alapintervalluma $\frac{a}{2}$. A lanthánvonálnál azonban az yttriumvonál $\frac{a}{2}$

frequenciakülönbségű m rezgésének megfelelő komponens hiányzik; de lehet, hogy ez összetevő kicsiny intenzitása oka annak, hogy ez a lemezen látható nem volt. E komponens a 4199·46 yttriumvonalnál is gyengének (1 intenzitásúnak) és elmosódott-nak van jelölve. Ugyanez áll a 4986·989 lantánvonalról is, a mely a 3950·51 yttriumvonallal azonos. De a legszebb azonos-ság a 3303·26 lantán, a 4358·91 és a 3195·80 yttrium, továbbá az 5997·4 báriumvonalak között jelentkezik. E vonalak *minden tekintetben* egymással teljesen azonosan bomlanak szét. Az alapintervallum $\frac{a}{2}$, a faktorok: 1, 2, 3. A 3916·21 lantán és a 3747·70 yttriumvonal a komponensek fekvését és azok intenzitását illetőleg azonosak, a p és belső m rezgések frequenciakülönbségei is elég jól egyeznek, csak a szélső m komponenseknél nagyobb 0·08 eltérés jelentkezik. A quadrupletekre bomló vonalak között is vannak megfelelők.

Az itt mondottak alapján megállapítható, hogy a míg a lantán és a tőle kémiaiilag teljesen különböző kobalt spektrálvonalai között az azonos ZEEMAN-effektus alapján két megfelelő nem volt található, addig a lantán és a vele kémiai rokonságban lévő yttrium és bárium között több azonos szétbontás észlelhető. Tehát a *kémiai rokonság a spektrálvonalak ZEEMAN-effektusában is kifejezést nyer.*

A jelen befejező paragrafusban még röviden megemlékezem ama egynéhány komplikáltan szétbomló vonalról, a melynek ZEEMAN-effektusa a Ritz-féle elmélettel csak nehezen hozható összhangzásba. (Lásd 16. old.)

Így a lantánra jellemzőnek talált dublet-kinézésű típusok ez elmélettel csak olyképen magyarázhatók, hogy a p rezgések egyetlenegy rezgéspár kivételével mind hiányzanak. E p rezgéspár pedig, melynek intenzitása igen nagy, egy magasabb m értékhez tartozik. (Az m jelentését l. 16. oldalon.) Ez incontinuitás azonban nem igen valószínű. Ehhez járul, hogy a jól mérhető 3715·67 vonal p összetevőjének a tulajdonképeni vonaltól való, továbbá a 4196·74 vonalnál a p összetevők egymástóli

távolsága az m -ek intervallumának nem sokszorososa, miként azt az elmélet kívánná.¹ A 3385·39 (XVI. táblázat) vonal p összetevőinek egymástóli távolsága $\frac{4a}{8}$, az m rezgések frequentia-különbsége azonban $\frac{3a}{8}$. Ez eltérés szemmel is látható és mérési hibának nem tulajdonítható. Ugyancsak eltérés jelentkezik a 3388·32 vonal (XVI. táblázat) p és m rezgéseinek intervallumai között. A p rezgések távolságai $\frac{4a}{12}$ és $\frac{6a}{12}$ az m -eké ellenben $\frac{7a}{12}$. Ez utóbbi az előzők sokszorosaként nem tekinthető. Szembetűnő a 3491·51, 3561·06 és 3941·05 (XVIII. táblázat) vonalaknak az elmélettől való eltérése is. E vonalaknál egy m rezgés a tulajdonképeni spektrálvonal helyén fekszik, miért is $\omega' = 0$; az m rezgések egymástóli távolsága $\omega = \frac{4a}{5}$. A p rezgések intervalluma $\frac{6a}{5}$ azonban $\frac{4a}{5}$ -nek nem sokszorososa. A vonal nagyon jól mérhető úgy, hogy az eltérés teljesen biztos. További oly példákat, a melyeknél az m és p rezgések egymással egyszerű viszonyban nincsenek, a quadrupletek között találhatunk.

De viszont a megvizsgált vonalak között a Ritz-féle elmélettel *igen szépen* egyező típusok is nagyszámban fordulnak elő. A 3921·71, 4077·51, 4716·594 (V. táblázat), 3381·10 (VI. táblázat) a legjobban egyező vonalak közé tartoznak. Ezeknél az m rezgéscsoportja a p -k csoportjának jobbra és balra való alkalmas nagyságú eltolásával csakugyan származtatható.

¹ Arra lehetne talán gondolnunk, a mit az előző tárgyalások folyamán említettem is, hogy ez erős p komponensek oly két-két vonalból állanak, a melyek egymástóli távolsága az m rezgések intervallumával egyenlő. E végből e komponensek szélességét felmértem, de az így nyert számadat minden vonalnál az m ek intervallumánál kisebbnek adódott.

Eredmények.

1. A *lanthán* spektrálvonalainak és a *kobalt* fővonalainak a mágneses erőter okozta komponensre való bomlását részletesen megvizsgáltuk.

2. A komplikált típusok komponenseinek távolsága a normális távolság törtrészeként egészszámú sokszorosaként állítható elő. Az előforduló alapintervallumok: $\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \frac{a}{5}, \frac{a}{6}, \frac{a}{7}, \frac{a}{8}, \frac{a}{9}, \frac{a}{10}, \frac{a}{11}, \frac{a}{12}, \frac{a}{13}, \frac{a}{14}$. Tehát a RUNGE-féle szabály számos szép példán igazolást nyert. Egyedül a 3921·71 és a 4575·08 vonal komponenseinek távolsága nem volt valamilyen alapintervallum sokszorosaként előállítható.

3. A kobaltnál három teljesen azonosan quadrupletre és három szintén teljesen azonosan septetre szétbomló vonalat találtunk. E három-három vonal biztosan egy-egy serieshez tartozik, mert mind a két csoport vonalai külön-külön a seriesst alkotó voltukhoz szükséges feltételeket kielégítik. Mind a két esetben a három vonal intenzitása a hullámhossz kisebbedésével csökken, továbbá frequentájuk egymástól úgy különbözik, miként az az egy és ugyanazon serieshez tartozó vonalaktól várható. A seriesformákat azonban megtalálnunk nem sikerült. A két series valószínűleg egymással vonatkozásban áll, mert az egyik csoport bármely két vonalának frequentiakülönbsége a másik csoport megfelelő két tagjának frequentiadifferentiájával igen közel egyenlő; továbbá a quadrupletek alapintervalluma a septetek alapintervallumának éppen a fele.

4. A 4550·948 lanthánvonal oly quadrupletre bomlik, a melynél a kevésbbé szétválasztott komponensek az erőterre merőleges, a jobban szétválasztott komponensek pedig az erővonalakkal parallel elektromos rezgésűek. (Becquerel és Deslandres típus.)

5. A *lanthán* ZEEMAN-effektusát a *kobalt*, továbbá az *yttrium* és a *bárium* ZEEMAN-effektusával hasonlítottuk össze. Ez elemek közül a lanthán és az yttrium a periodikus rendszer ugyanazon,

harmadik csoportjába tartozik, a bárium a rendszer második csoportjában a lanthánnal parallel fekszik; a kobalt ellenben a lanthánnal semmiféle chemiai rokonságot sem mutat, a mennyiben ez a nyolczadik csoportnak tagja és a lanthánnak nem is parallel eleme. A míg a lanthán- és a kobaltvonalak ZEEMAN-effektusa között semmiféle hasonlóság sem volt észlelhető, addig a chemiailag rokon lanthán, yttrium és bárium bizonyos vonalai teljesen azonos szétbontást mutatnak. A chemiai rokonság tehát ez elemeknél a ZEEMAN-effektusban is kifejezést nyer.

6. A megvizsgált vonalak ZEEMAN-effektusai között vannak olyanok, a melyek a RRTZ-féle elmélettel összhangzásba nem hozhatók. Találtunk azonban oly spektrálvonalakat is, melyeknél a megegyezés *igen kitűnő*.

★

Kísérleti vizsgálataimat dr. VOIGT WOLDEMAR göttingeni egyetemi tanár, titkos tanácsos úr buzdítására physikai laboratoriumában végeztem.

Legyen szabad tehát dr. VOIGT WOLDEMAR tanár úrnak e munkára való serkentéseért, nemkülönben szívélyes támogatásáért és ama sok jó tanácsáért, melylyel vizsgálataimban támogatni szíves volt, e helyen is leghálásabb köszönetemet kifejeznem.

De nagy hálával tartozom mélyen tisztelt tanárom, dr. FRÖHLICH IZIDOR udvari tanácsos, budapesti egyetemi tanár úrnak is, nemcsak amaz élénk érdeklődéseért, melylyel vizsgálataim folyamán részesíteni szíves volt s ama támogatásáért, melylyel lehetővé tette, hogy szerény dolgozatom nyomtatásban is megjelenjen, hanem azonfelül egyetemi hallgató korom óta töle nyert tanulmányaim irányítására vonatkozó számos értékes tanácsáért is.

IRODALOM.

Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn.

In Auftrage der mathematischen Reformkommission des Landesvereins der Mittelschulprofessoren nach dem ungarischen Original unter Mitwirkung der Herren M. Balog u. I. Rados deutsch herausgegeben von E. BEKE u. S. MIKOLA. Leipzig, Teubner. Ára 4 M.

Jellemző tünet, hogy a középiskolai mennyiségtani oktatás anyagának és módszerének megváltoztatása érdekében újabban megindult külföldi mozgalmak nemcsak középiskolai tanároktól, hanem főképen szaktudósoktól, főiskolai profeszoroktól erednek. KLEIN FELIX, PERRY, CZUBER, GUTZMER, BOREL, FEHR, az American Mathematical Society vezéreiből és még számosan nem átalították, hogy közremunkálkodjanak e — látszólag csak a középiskolát, a pedagógust érdeklő — kérdések megoldásán.

Bizonyára átértézték, hogy az új szellemben tartott oktatás egyfelől az eddiginél sokkal jobban fogja meggyökereztetni a köztudatban azt a meggyőződést, hogy a matematika a kultúrának igen fontos tényezője, másfelől pedig az egyetemi tanításnak, a tiszta szaktudománynak is nagy haszára lesz.

Nálunk BEKE MANÓ egyetemi tanár nevéhez fűződik az egész mozgalom megindítása és eredményes munkája. Tudósítások a külföldi törekvésekről már előbb is megjelentek GOLDZIER, MIKOLA, RADOS I. és mások tollából, de az egész tanárságot a kérdés csak az Orsz. Középisk. Tanáregyesület 1906. évi közgyűlése óta foglalkoztatta, melyen BEKE kifejtette azokat az irányelveket, melyeknek szemmel tartásával a reformeszméket nálunk meg lehetne és meg is kellene valósítani. Ennek az előadásnak következménye volt az egyesület matematikai reformbizottságának megalakulása.

E bizottság gyűlésein elhangzott előadásokat, az azokban foglalt javaslatokat, végül az ezekről szóló összefoglaló jelentést BEKE elnök és MIKOLA jegyző könyv alakjában kiadták 1909-ben. Most jelent meg ugyanennek a munkának átdolgozott német kiadása. Ebben sok részletet,

mely inkább a hazai köröket érdekelhette, elhagytak, a magyar kiadásban előforduló többszörös ismétlődéseket lehetőleg elkerülték, az apró ellentmondásokat elsímították. Ezáltal a mű, melynek nyelve majdnem mindenütt jó németes, értékben csak nyert. Az előszóban MIKOLA a könyv létrejöttének történetét mondja el. BEKE bevezető cikkében a magyarországi középiskolák matematikai tanterveit mutatja be az 1777-ben megjelent első Ratio educationistól kezdve egészen az 1899-ben kiadott WLAŠSICS-féle tantervig. Rámutat azok hátrányaira tárgyi és módszertani szempontból (összetartozó részeket külön tanítanak, egyes fejezetek egymásutánja helytelen, a gyakorlati alkalmazásokat elhanyagolják, felesleges dolgokat tartalmaznak), de konstatálja egyszersmind a fejlődést és javulást is.

Ezt a cikket követi BEKÉ-nek már említett kongresszusi előadása, melynek nyoma megérzik a bizottság javaslatain. GOLDZIEHER érdekes referátumában megállapítja, hogy a mostani követelmények közül a függvény fogalmának és a grafikai módszernek a hetedik osztályba való bevezetése Magyarországon már 1874-ben tanácskozás tárgya volt; közli a német, francia és angol régebbi szórványos kísérleteket, majd a modern követelmények szabatos jellemzése után a külföld egyes államai mozgalmának történetét adja. Kár, hogy szerzőnek e tárgy teljes bibliográfiáját felölő hasznos munkáját pénzügyi okokból nem lehetett a kötethez csatolni.

A részletkérdések tárgyalását kezdi FRÖHLICH KÁROLY-nak az alsófokú számtani oktatás czélszerű berendezéséről írt, a német kiadás számára átdolgozott cikke. Szerinte az első és második osztály anyagából az időszámításra, a régi hossz- és súlyegységekre és szögmértékekre vonatkozó tárgyalásokat, a harmadik osztály anyagából pedig az összetett hármasszabályt, a váltókra vonatkozó számításokat, a láncszabályt, a keverésszámítást, mint a gyermek érdeklődését le nem kötő, vagy egyáltalán fölösleges részleteket el kellene hagyni. Az első osztályból a másodikba kellene helyezni a közönséges törtekkel való műveleteket, a harmadikból pedig a felsőbb osztályokba az értékpapírokra vonatkozó számításokat. Az ilyen módon nyert idő lehetőségessé tenné, hogy már a harmadik osztályban tanítsuk a négy alaplóműveletet pozitív egész algebrai számokkal.

A hagyományos tanításianyag megrövidítésén kívül különösen a módszer megjavításától várnak sokat az újítkók, kik a függvényszerű gondolkodás kifejlesztését tűzték ki a reformok egyik főczéljául. Ennek előkészítése, megalapozása már az első osztályban kezdődhetik alkalmas grafikai eljárással. A grafikai módszernek a matematika tanításában való alkalmazásáról PÉCH ALADÁR-nak (szintén átdolgozott) érdekes cikke szól.

Megállapítja, hol és mily mértékben kellene ezt a hasznos eljárást alkalmaznunk, a nélkül, hogy túlzásokba esnénk. A számtan tanításában használjuk fel a grafikus eljárásokat eredmények vagy fogalmak megérzéskéítésére, az algebra tanításában ábrázoltassuk az előforduló függvényeket és kifejezéseket koordinatarendszerben, továbbá használjuk fel a módszert tételek bebizonyítására is. Gondoskodjunk arról, hogy a feladatok grafikus megoldásában a tanulók kellő ügyességre tegyenek szert. Végül a tanítás minden fokán helyezzünk különös súlyt az észlelési görbékre.

A funkcionális gondolkodást előkészítik még a tanuló megfigyelései és mérései. Ezekről szól MIKOLA-nak a kutató módszernek az alsófokú matematika tanításában való használatáról írt tanulmánya. Adjunk módot a növendéknek arra, hogy a saját tapasztalatából is tanulhasson. Ez megtörténhetik, ha a számtan tanítása mérési műveletekkel kapcsolatos. Szükséges tehát, hogy az iskolákat felszereljük a kellő mérőeszközökkel. Egy heurisztikus alapon felépített részletes tanításmenet közlése után a módszernek az angol iskolákban való alkalmazásáról szól még a cikk, mely e kérdés irodalmát is ismerteti.

A geometria tanításával — különböző szempontból — négy cikk foglalkozik. A dolog természetéből következik, hogy itt sok az ismétlődés. RADOS I. a geometriai oktatás irányító elveiről értekezik, továbbá arról a kapcsolatról, melyben a geometria egyes eddig valóságos különböző diszciplínáknak tanított részei egymással állnak. Nagyon is igaza van, midőn rámutat arra, hogy a mostani viszonyok mellett a tanulónak térszemlélete nem eléggé kifejlett. «Ma a dolognak az a látszata van, mintha a geometriát csak azért tanítanók, hogy több legyen az anyag az algebrában tanultaknak begyakorlására.» A koncentráció érdekében a tanítás minden fokán a geometriai tárgyakat valamennyi osztályban a számtannal és algebrával kapcsolatban *egy* tanár tanítsa. Gazdaságosabbá válnék az oktatás, ha ez nem három, hanem csak két fokozatban történne úgy, hogy a rendszeres tárgyalás már a harmadik osztályban venné kezdetét, továbbá úgy, ha a sík- és térgeometriát nem különítenék el szigorúan egymástól. Így azután a gimnáziumban is lehetne analitikai és ábrázoló geometriát tanítani.

SZABÓ PÉTER a geometriának az alsó osztályokban való tanításáról ír. Nem ajánlja a rendszeres geometriának már a harmadik osztályban való kezdetét. Itt inkább a planimetriai ismeretek kibővítése volna helyes, továbbá az elemi földmérés és a mérőeszközök ismertetése. (A bizottság többsége elfogadta ezt a javaslatot.) Így a rendszeres tárgyalás a IV. osztályban kezdődne.

KOPP a geometriai tananyagának magyarországi és külföldi beosztását

tárgyalja. Javaslatai közül megemlítjük, hogy a trigonometriai alapfogalmak már a hasonlósággal kapcsolatban tárgyalandók, azokat a trigonometriai tételeket, melyek csak a logaritmikus számítás könnyítésére szolgálnak, hagyjuk el, a szterometria tanításában fordítsunk nagyobb figyelmet a geometriai részre, a komplikált felszín és térfogatszámításokat az algebrai órára utaljuk.

E három szerző mindegyike sürgeti a geometriai rajzolást az egész vonalon. Részletesen a geometriai rajzoktatás kérdését PRIVORSZKY tárgyalja egy igen rövid, de érdekes cikkben. Szerinte a felsőbb osztályokban is szükség van a geometriai rajzoktatásra. Ennek anyaga feloszlanék egy kötelező és egy nem kötelező részre. Ez utóbbi az elméleti oktatástól függetlenül tisztán gyakorlati volna. A rajztanítás kiterjedne a gimnáziumban az ábrázoló geometriának szemléleti, tehát gyakorlati alapon való tárgyalására is, míg a reáliskolákban axonometrikus és perspektív képek is volnának készíthetők megfelelő árnyékszerkesztéssel kapcsolatban. A rajzoktatásban jusson fontos szerepe a mérésnek.

WINTER négy számjegyű logaritmustábla bevezetését javasolja és ajánlja, hogy a jobb tanulókkal ismertessük meg a számológép használatát és különböző, a számolási eljárásokat megrövidítő hasznos táblázatok behozását kívánja a tanítás gazdaságos berendezése érdekében.

RÁTZ kimutatja, hogy ha a függvényfogalom alkotja matematikai oktatásunk gerinczét, akkor egész tanításunk egységesebb lesz. Részletesen kifejti, mint kell már a legalsóbb foktól kezdve a függvény fogalmát előkészíteni, hogy a függvényekről tanultak a VII. osztályban az analitikai geometria szempontjából összefoglalhatók legyenek. Ezt követnék a differenciál- és integrálszámításnak ama részei, melyek ismerete az általános műveltség, valamint a középiskolai tananyag gazdaságos tárgyalása szempontjából okvetlenül szükséges. Foglalkoznunk kell tehát a racionális egész függvény, trigonometriai függvény, negatív és tört kitevőjű hatványok, egyszerű gyökmennyiségek, ciklometrikus függvények differenciálhányadosával, az integrálszámításból pedig a kapott differenciálhányadoshoz tartozó primitív függvény meghatározásával. Ezeket felhasználjuk geometriai és fizikai feladatok megoldására.¹

A matematika és fizika vonatkozásairól SZABÓ GÁBOR írt. Tapasztalatai alapján kíváncsnak tartja, hogy mesterkelt algebrai és geometriai példák tárgyalása helyett inkább értékes fizikai feladatcsoportok feldol-

¹ A magyar kiadásban a differenciál- és integrál számítás elemeinek (Sor alatt) középiskolai anyagával még BEKE egy cikke is foglalkozik. Ezt a cikket a német kiadásból a szerzők hely szűke miatt kihagyták, de a SCHOTTEN-féle «Zeitschrift für den math. Unterricht»-ben megjelent.

gozásával foglalkozunk, hogy a függvényfogalom felépítésénél, a hol lehet, fizikai jelentőségű függvényeket használjunk fel és hogy a képletek ténybeli értelmére mindig figyelmet fordítsunk. Mindegyik cikk hangsúlyozza, hogy a reformtervek megvalósításával a tanulót nem terheljük túl.

A tanítás anyagának és methodikájának ez a megváltozása inkább a tanárra ró új terhet. A reformtörekvéseknek a tanárképzésre való hatásáról BEKE mondja el nézeteit. Azokat a hiányokat, melyeket egyes jeleltek tudásán és számolásbeli ügyességén tapasztalhatni, részben megfelelő előadások és gyakorlatok által, részben pedig a középiskolai matematikai irodalomnak a hallgatóság számára való hozzáférhetővé tétele által lehetne megszüntetni. Czélszerű volna, ha a hallgató az egyetemen az alkalmazott matematikáról rövid, összefoglaló előadásokat hallhatna, ha az alapvizsgálaton csak szaktárgyaiból kellene felelnie, míg a magyar irodalomból csak a pedagógiai vizsgán. Szünidei tanfolyamok elősegítenék a matematikai reformeszmék terjedését.

E cikkhez fűz néhány észrevételt a technikus szempontjából CZAKÓ ADOLF műegyetemi tanár, a ki rámutat arra, hogy a reformtörekvések nemesak a középiskola egységes főczélja érdekében üdvösek, hanem e mellett különösen a technikára való előkészítés szempontjából is rendkívül fontosak.

Az előadások sorát bezárja a bizottság jegyzője által igen pontosan stilizált «Jelentés a bizottság határozatairól és javaslatairól».

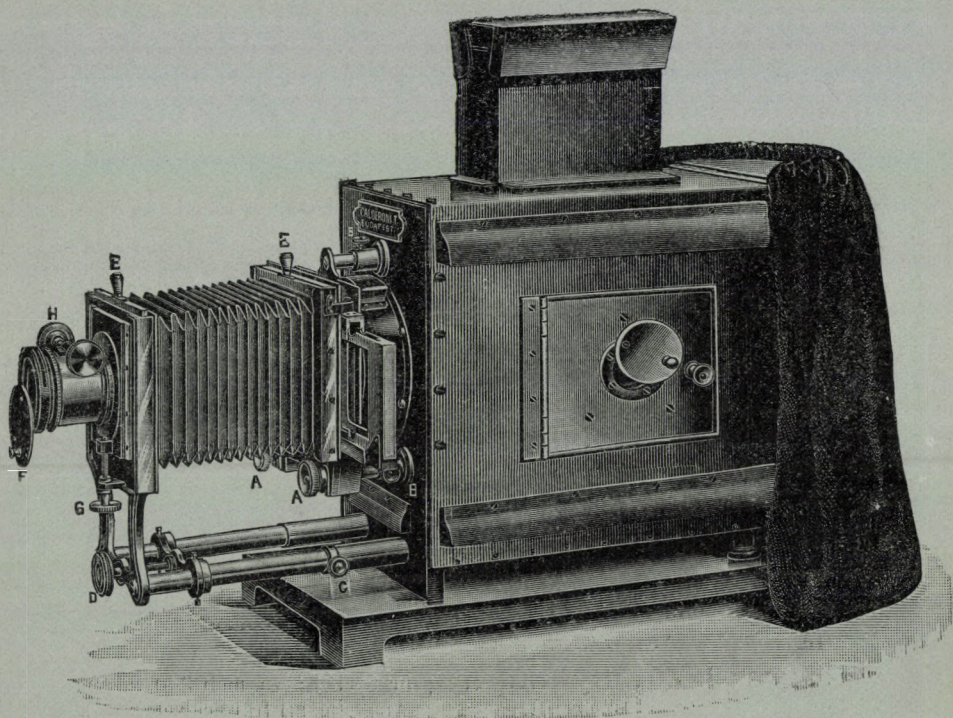
A könyv német kiadásának ötletét szerencsésnek kell tartanunk. Igaz, hogy — a mint azt a kiadók az előszóban szerényen kijelentik — nem adhatnak a külföldnek sok új gondolatot, de hiszen a reformtörekvések minden államban majdnem teljesen egyformák, a nélkül, hogy ebben az I. M. U. K.-nak még eddig érezhető volna a jövőben bizonynyal igen erősen fejlődő befolyása az eszmék tisztázására. A szerzők érdeme egyfelől, hogy a külfölddel hitelesen megismertetik középoktatásunkat, másfelől pedig a tárgy methodikai feldolgozásában, a reformeszméknek hazai viszonyainknak a legjobban megfelelő, lelkiismeretes átültetésében van. KLEIN FELIX mondta 1904-ben a reformtörekvésekre: «Es gilt nicht mehr neue Gedanken zu finden, sondern die richtigen Gedanken innerhalb der gegebenen Verhältnisse in richtiger Weise zur Geltung zu bringen.»

Jaeger Imre.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésű szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekerénye legjobb minőségű aczélemezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágító-lencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalat, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensortartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektív-tartó előrész egy mikrometer-csavar segítségével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bárszonyból készült fényelzáró-függönnyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül*

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túlfoldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetítő készülékünket a legtökéletesebb ilyenmű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetítési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

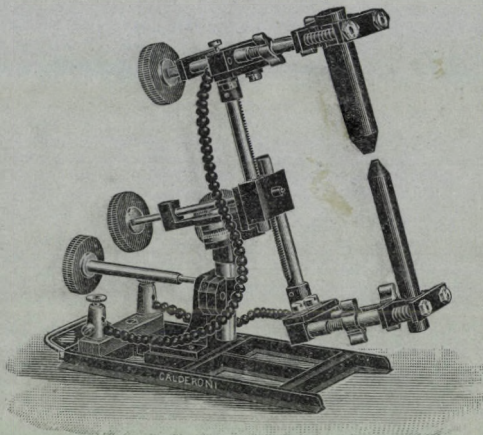
Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgy szintén szinképek, interferenciális tűnmények, fényelhajlási, fény-arkitási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mécsfénnel, acetylénnel, borszesz-izzófénnel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segítségével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. Ára K 90.—



Borszesz-izzófénylámpa légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segítségével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legcélszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.



50255

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ és RADOS GUSZTÁV

HUSZADIK ÉVFOLYAM

VI., VII., VIII. FÜZET

1911

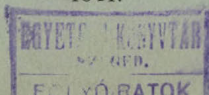
OKT.—NOV.—DEC.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1911.



TARTALOM.

	Lap
GEÖCZE ZOÁRD: A területmérésről. (Első közlemény.)	255
TERLANDAY EMIL: A kettőtörés utánzása üveglemezekkel. (Második közlemény.)	302
ZEMPLÉN GYÖZÖ: A relativitás elvéről.	331
LAKITS FERENCZ: Az üstökösök pályája.	348
UJJ GYULA: Lencserendszerek fõpontjainak és fõfelületeinek kísérleti meghatározásáról.	357
A Matematikai és Fizikai Társulat tizennyolcadik rendes közgyûlése.	380
A Matematikai és Fizikai Társulat XVIII. tanulóversenye.	387
A Matematikai és Fizikai Társulat XVIII. versenyén br. Eötvös díjjal jutalmazott dolgozatok. I. Hlucsil Károly dolgozata	389
II. Klein Gábor dolgozata.	392

A Matematikai és Fizikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi fûzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmû lesz. Elõfizetési ára 10 korona. A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszadik társulati év 1911 január 1-én kezdõdött.

A tagsági díj (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év elsõ negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiun tanár (VI., Nagy János-utca 37.) címére beküldeni. A múlt évekrõl hátralékban levõ t. Tagtársainkat sürgõsen kérjük a tagsági díj beküldéséért.

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhetõ be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az elsõ és harmadik évfolyam elsõ fûzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap elsõ és harmadik csütörtökén tartja a tud. egyetem fizikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az elõadások tárgyát — egy matematikai és egy fizikai tárgy — 2—3 nappal az ülés elõtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivõtitkár czimére **VIII., Múzeum-körút 6.** intézendõk.

A folyóirat szellemi részét illetõ küldemények (cikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztõkhöz küldendõk; a matematikai tárgyak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a fizikai tárgyak pedig *Kövesligethy R.* czime alatt. A reclamatiók, címváltozások a pénztárnokhoz intézendõk.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentûl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelõ nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

A reclamatiók, címváltozások a pénztárnokhoz intézendõk.

A TERÜLETMÉRÉSRŐL.

(Első közlemény.)

A területmérés a görbe felületek területének a megmérésével foglalkozik, tehát célja a felületnek és a felület területének definitióját megadni és módot nyújtani a terület meghatározására.

Jelen értekezés célja e definitiók megadása s bizonyos felületek területének a meghatározása. E felületek minden oly felületnél, a melynek területe ez ideig meghatározott általánosabbak.

ELSŐ FEJEZET.

A felület s a terület definitiója.

Minden előfordulandó idom a három dimenziós euklidesi térben van. Felveszünk egy hosszúságot a hosszúságok egysége gyanánt. A sík sokszögek területének egységül azon négyzet területét választjuk, a melynek oldala a hosszúság egysége.

A *felület definitiója*. Vegyünk fel két derékszögű pontkoordináta rendszert.¹ A koordinátákat e rendszerekre vonatkozólag x, y, z , illetve ξ, η, ζ jelöljük. Jelölje P az xy -sík egy tartományát,² például legyen P a $(0, a; 0, b)$ parallelogramma.³

¹ Felteszszük, hogy e rendszerek congruensek.

² Tartománynak az oly síkrészt nevezzük, a melyet egy egyszerűen zárt, véges ívhosszú síkgörbe határol.

³ Ha $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ íratik, felteszszük, hogy $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ az xy sík azon parallelogrammjának a jele, a melyet az

$$x=x_1, x=x_2, y=y_1, y=y_2$$

egyenesek határolnak.

$$f^{(1)}(x, y), \quad f^{(2)}(x, y), \quad f^{(3)}(x, y)$$

a P -ben definiált, egyértékű, határolt és folytonos függvényeket jelentsenek.¹ Tekintsük azt az idomot, a mely mindama pontokból áll, a melyek ξ, η, ζ coordinátái sorban $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$.

Ezt az idomot kétféle szempontból tekinthetjük.

Először is mint a térből az $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ függvények segítségével kijelölt pontok halmazát, úgy hogy e függvények csakis az idom megszerkesztésére szolgálnak s aztán elejtetnek, másodszor pedig mint oly idomot, a melynél az $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ függvényekkel való kapcsolat mindennemű vizsgálatnál fenn van tartva.

Mi ez utóbbi szemponthoz ragaszkodunk s ezt pontosan így értelmezzük.

«Adatván az idomnak egy ξ_1, η_1, ζ_1 coordinátákkal bíró pontja, mindig adatik egy eljárás, a mely a P azon x, y pontjai közül, a melyekre

$$\xi_1 = f^{(1)}(x, y), \quad \eta_1 = f^{(2)}(x, y), \quad \zeta_1 = f^{(3)}(x, y)$$

legalább egyet jelöl ki.»

Így értelmezve az idom neve felület. Jele R legyen.

A következőkben a P x, y pontjának megfelelő pont alatt azt a pontot értjük, a melynek ξ, η, ζ coordinátái sorban $f^{(1)}(x, y), f^{(2)}(x, y), f^{(3)}(x, y)$. Azt az idomot, a mely áll ama pontokból, a melyek x, y, z coordinátái rendre $x, y, f^{(h)}(x, y)$ ($h=1, 2, 3$) az R segédfelületének nevezzük. Jele $z=f^{(h)}(x, y)$ lesz.

Nyilvánvaló, hogy a gyakorlati és mathematikai igényeknek megfelelően a felület területét legcélszerűbb a felületet approximáló polyederek területével definiálni.

A definitió kérdése 1881-ig. Irjunk a $z=f^{(3)}(x, y)$ segédfelületbe egy, végezzámú háromszöglapból álló $\Delta^{(3)}$ polyedert, a mely δ egy pozitív számot jelentvén még a következő tulajdonságokkal bír.

¹ Minden előforduló érték, függvény stb. valós.

1. Egyszerűen összefüggő, kerülete a $z=f^{(3)}(x, y)$ kerületének folytonos deformációjából úgy keletkezik, hogy a deformáció alatt a mozgó pontok a $z=f^{(3)}(x, y)$ kerületétől δ -nál messzebb nem távoznak.

2. Élei kisebbek δ -nál.

3. Minden az xy síkra merőleges egyenes csak egy pontban találhatja.¹

Írjuk be R -be a megfelelő Δ polyedert. Azaz, ha $\Delta^{(3)}$ egy háromszöge csúcsainak x, y koordinátái $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ Δ egy háromszögének csúcsai az e pontoknak megfelelő pontok és csakis ily pontok legyenek.

Nevezzük e Δ polyedert a δ -hoz valónak. Egy δ -hoz nyilván végtelen sok Δ való.

Ha $\delta_r > 0$ ($r=1, 2, \dots$) és ha Δ_r egy a δ_r -hez való polyeder azt mondjuk, hogy a Δ_r polyeder-sor a δ_r sorhoz való. Ha a következőkben egy Δ_r sort veszünk fel, felteszszük, hogy e sor egy oly δ_r sorhoz való, a melyre $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_r = 0$.

Δ , illetve Δ_r területét Δt , illetve $\Delta_r t$ jelöljük.

Nagy ideig közhit volt, hogy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta t$$

létező s ezen értéket definiálták a felület területe gyanánt.

Ezt a hiedelmet támogatta azon körülmény, hogy ha

$$\frac{\partial f^{(h)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial f^{(h)}}{\partial y}, \quad (h=1, 2, 3)$$

létezők továbbá még határoltak és folytonosak és ha a Δ_r -et meghatározó $\Delta_r^{(3)}$ éleinek az xy síkra való projectiójából² álló idom előáll, ha a P az x és y tengelyvel parallel egyenesekkel parallelogrammákra bontatik s e parallelogrammákban egy-egy átlót vonunk

¹ Így a $\Delta^{(3)}$ xy síkra való projectiója egy oly egyszerűen zárt sokszög, a melybe $(\delta, a-\delta; \delta, b-\delta)$ beilleszik.

² Projectió alatt mindig derékszögű projectiót értünk.

$$\lim_{r=\infty} \Delta_r t = \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{D(f^{(1)}, f^{(2)})}{D(x, y)} \right)^2 + \left(\frac{D(f^{(1)}, f^{(3)})}{D(x, y)} \right)^2 + \left(\frac{D(f^{(2)}, f^{(3)})}{D(x, y)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy. \quad (1)$$

Ámde SCHWARZ 1881-ben kimutatta, hogy még a legegyszerűbb felületeknél is $\lim_{r=\infty} \Delta_r t$, a Δ_r sor kellő választásával, az (1) alatti értéknél bárminő nagyobb értékkel lehet egyenlő.

E példa a következő:

A felület egyenletei

$$\xi = a \cdot \cos \frac{2\pi x}{a}, \quad \eta = a \cdot \sin \frac{2\pi x}{a}, \quad \zeta = y$$

legyenek. E felület nyilván egy oly egyenes körhenger palástja, a mely henger magassága b , alapkörének küllője pedig a .

Oszzuk a P -nek a hosszúságú oldalát r , b hosszúságú oldalát n egyenlő részre. Vonjunk e részek végein át az y , illetve az x tengelylyel parallelákat.

A P így $r \cdot n$ parallelogrammára bomlik. Vonjuk meg ezek átlóit. Oszzuk a P -nek b hosszúságú oldalát $2n$ egyenlő részre. E részek végein át vonjunk az x tengelylyel parallelákat.

E parallelák s az átlók $2 \cdot (2r-1) \cdot n$ háromszöget képeznek, e háromszögek egyenlőszárúak, alapjaik az x tengelylyel parallelák, továbbá e háromszögek mind egybevágók.

Írjuk be a hengerbe azon Δ_r -et, a melynél a $\Delta_r^{(3)}$ projectiója az x, y síkra a leírt idom.

Egyszerű geometriai úton nyilvánvaló, hogy Δ_r háromszögei is egyenlőszárúak (az alpból az alap származván) és congruensek. Még pedig egy-egy ily háromszög alapja a henger körmetszetébe írt szabályos r oldalú sokszög oldalával egyenlő, az alappal szemben fekvő csúcs pedig a körtől $\frac{b}{2n}$ távolban van. Így

$$\Delta_r t = 2 \cdot (2r-1) \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot \sin \frac{\pi}{r} \cdot \left[\left(\frac{b}{2 \cdot n} \right)^2 + \left(a - a \cdot \cos \frac{\pi}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_r t = 2 \cdot \left(r - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi}{r} \right) \cdot a \cdot \left[b^2 + a^2 \cdot \left(16 \cdot n^2 \cdot \sin^4 \frac{\pi}{2 \cdot r} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ha n az r -el együtt határtalanul nő, úgy a keletkezett Δ_r sorozat nyilván egy oly δ_r sorozathoz való, a melyre $\lim_{r=\infty} \delta_r = 0$. Ámde ismeretes, hogy

$$\lim_{x=\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 1.$$

Tehát

$$\lim_{r=\infty} \left(r - \frac{1}{2} \right) \cdot \sin \frac{\pi}{r} = \pi$$

és

$$\lim_{r=\infty} \left(16 \cdot n^2 \cdot \sin^4 \frac{\pi}{2 \cdot r} \right)$$

értéke pedig azon módtól függ, a hogy n az r -el együtt a végtelenbe nő. Így például, ha

$$\lim_{r=\infty} \frac{n^2}{r^4} = 0, \text{ const.}, +\infty$$

a limes értéke zérus, illetve egy tetszőleges véges pozitív állandó illetve $+\infty$. Ekként, ha n az r -hez képest kellőkép vétetik fel

$$\lim_{r=\infty} \Delta_r t = 2\pi \cdot a \cdot [b^2 + k^2]^{\frac{1}{2}},$$

k egy tetszőleges valós értéket jelentvén.

Nyilván

$$\lim_{r=\infty} \Delta_r t \geq 2 \cdot \pi \cdot a \cdot b,$$

$2 \cdot \pi \cdot a \cdot b$ pedig jelen esetben az (1) alatti érték.

A példa alapján tehát kimondható, hogy $\lim_{\delta=0} \Delta t$ az általános felületnél R -nél se létezhet.

A definitió kérdése a leírt állapotban maradt 1902-ig, midőn is LEBESGUE «Intégrale, Longueur, Aire» című munkájában a területnek kifogástalan definitióját adta polyederek segítségével.

LEBESGUE-t definitiójában az általa az ivhosszra adott definitió analógiája vezette.

Szerző 1906-ban, LEBESGUE munkáját nem ismerve, a SCHWARZ-féle példából kiindulva, a területnek polyederek segélyével szintén adta egy definitióját.

E két munka egybevetése alapján kiderül, hogy polyederek segélyével a területnek több definitiója adható.

Mielőtt azonban e definitiókat adnók a SCHWARZ-féle példából néhány következtetést vonunk.

Következtetések a SCHWARZ-féle példából. A hengernél nemcsak az előbbi Δ_r sorozatokra, de bármily Δ_r sorozatra is

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r t \geq 2 \cdot \pi \cdot a \cdot b.^1$$

Ugyanis írjunk a henger palástjába, miként az az elemekben szokás, egy oly prizmatikus felületet, a melynek vezérvonala a henger alapkörébe írt szabályos, s oldalú sokszög és a melynek oldalélei a henger alkotói. Ha w egy előre adott pozitív szám, az s elég nagyra vételével a prisma oldalfelületének a területe $2\pi ab$ és $2\pi ab - w$ közzé esik. Vonjunk a henger tengelyén át a prisma oldalélein átmenő félsíkokat. Két-két ily szomszédos félsík közé eső részét a Δ_r -nek vetítsük a prismának a félsíkok közé eső oldallapjának a síkjára.

E vetület területe nyilván nem nagyobb a Δ_r említett részének a területénél. Ha r elég nagy a vetület területe nyilván nem kisebb mint a prismaalap $\frac{w}{s}$ -el kisebbitett területe.

Így tehát

$$\Delta_r t \geq 2\pi ab - w - s \cdot \frac{w}{s}.$$

Ha w a zérus felé convergál r szükségkép $+\infty$ felé convergál s így

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r t \geq 2\pi ab.$$

¹ Felteszszük, hogy $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r t$ határozott.

$2\pi ab$ a hengerpalástnak az elemekben definiált területe s egyúttal a hengerpalástra vonatkozó (1) alatti érték is. Azaz a hengerpalástnak az elemekben definiált területe s az (1) alatti érték is a legkisebb $\lim_{r=\infty} \Delta_r t$ értékkel egyenlő.

Ily legkisebb $\lim_{r=\infty} \Delta_r t$ minden R -nél létező.

Tekintsük az R -hez képezhető összes Δ_r sorozatokat. Ezek között vannak olyanok, hogy $\lim_{r=\infty} \Delta_r t$ határozott és e határozott értékek között van egy legkisebb.

Ugyanis, ha Δ_r egy polyedersorozat, $\Delta_r t$ egy értéksorozat. Ámde ismeretes, hogy találhatók oly $i_1 < i_2 < \dots < i_s < \dots$, pozitív egész számok, hogy

$$\lim_{s=\infty} \Delta_{i_s} t$$

határozott. A Δ_{i_s} sorozat pedig nyilván a δ_{i_s} sorozathoz való és $\lim_{s=\infty} \delta_{i_s} = \lim_{r=\infty} \delta_r = 0$. Ekként a Δ_{i_s} sorozat is egy Δ_r sorozat.

Tekintsük azon halmazt, a melynek elemei az összes határozott $\lim_{r=\infty} \Delta_r t$ értékek.

E halmaz nyilván úgy képezhető, hogy egy állandó δ_r ($\delta_r > 0$, $\lim_{r=\infty} \delta_r = 0$) sorozathoz, minden lehetséges Δ_r sorozatot képezünk s e sorozatokra képezett minden határozott $\lim_{r=\infty} \Delta_r t$ értéket kijelölünk.

Jelölje T_6 a halmaz alsó határát. (T_6 nyilván nem negatív.) Állítom, hogy T_6 a halmaz eleme.

Mert ha nem volna az, WEIERSTRASS egy ismert tétele szerint léteznének a halmaznak oly E_r elemei, hogy

$$0 < E_r - T_6 < \delta_r.$$

E_r egy $\lim_{r=\infty} \Delta_r t$. Vegyük fel azon Δ_r sorozatnak, a melyre $\lim_{r=\infty} \Delta_r t = E_r$ egy oly Δ_s tagját, hogy $s \geq r$ legyen és még $|\Delta_s t - E_r| < \delta_r$ álljon. Jelöljük e Δ_s -et Δ_r -el. Az így nyert Δ_r sor nyilván a δ_r sorhoz való és

$$|\Delta_r t - T_6| < 2\delta_r$$

miatt

$$\lim_{r=\infty} \Delta_r t = T_6.$$

A terület definitiói. Legyen $w_r \geq 0$, $\lim_{r=\infty} w_r = 0$.

$$f_r^{(h)} \quad (h=1, 2, 3, r=1, 2, \dots)$$

a P -ben definiált oly egyértékű, határolt és folytonos függvényeket jelentsenek, hogy

$$|f_r^{(h)} - f^{(h)}| < w_r$$

álljon.

$$\xi = f_r^{(1)}, \quad \eta = f_r^{(2)}, \quad \zeta = f_r^{(3)},$$

tehát egy R_r felület egyenletei.

Legyen $\partial_r > 0$, $\lim_{r=\infty} \partial_r = 0$.

Írjunk a $z = f_r^{(3)}$ felületbe oly végeesszámú háromszögekből álló $\Delta_r^{(3)}$ polyedert, a melynek a következő sajátságai vannak:

1. Egyszerűen összefüggő, kerülete a $z = f_r^{(3)}$ kerületének folytonos deformációjából úgy keletkezik, hogy a deformáció alatt a mozgó pontok a $z = f_r^{(3)}$ kerületétől ∂_r -nél messzebb nem távoznak.

2. Élei kisebbek ∂_r -nél.

Így $\Delta_r^{(3)}$ nyilván a $z = f_r^{(3)}$ folytonos deformációjából származik, a kerület a leírt módon mozogván.

Írjuk be R_r -be a megfelelő Δ_r polyedert.

Ismeretes, hogy találhatók olyan a P -ben definiált, egyértékű, határolt és folytonos $F_r^{(1)}, F_r^{(2)}, F_r^{(3)}$ függvények, hogy a

$$\xi = F_r^{(1)}, \quad \eta = F_r^{(2)}, \quad \zeta = F_r^{(3)}$$

felület mint pontok halmaza a Δ_r .

E függvények nyilván végtelen sok módon választhatók. Jelölje $\lambda_r^{(h)}$ az

$$|F_r^{(h)} - f_r^{(h)}|$$

értékeinek felső határát.

Nyilvánvaló, hogy bármi is legyen az $F_r^{(h)}$ választása általában nem lesz

$$\lim_{r=\infty} \lambda_r^{(h)} = 0.$$

Jelölje I. azon halmazt, a melynek elemei az összes létező \mathcal{A}_r sorozatok. E halmaz több, kevésbé kiterjedtet tartalmaz.

A legfontosabb, jele II. legyen, az a melynek minden eleménél az $F_r^{(h)}$ függvények választhatók, úgy hogy

$$\lim_{r=\infty} \lambda_r^{(h)} = 0.$$

Egy másik, jele III. legyen az, a melynek elemeinél $w_r = 0$. IV. jelentse a II. és III. közös elemeiből álló halmazt.

V. álljon a IV. azon elemeiből, a melyeknél a $\mathcal{A}_r^{(3)}$ lapjai egymást át nem hatják.

VI. legyen az V. azon része, a melynél a $\mathcal{A}_r^{(3)}$ polyedereket, minden az xy síkra merőleges egyenes csak egy pontban metsz.

Miként előbb, a VI. halmazt tekintve, kimutattuk T_6 létét, úgy mutatható ki az I—V. halmazokra nézve is oly T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 értékek létezése, a melyek a legkisebbek a halmazokhoz való határozott $\lim \mathcal{A}_r t$ értékek között.

A II. halmaz I. része s így $T_2 \geq T_1$. Ámde egyszerű úton ki lehet mutatni, hogy $T_2 = T_1$. Ezt elfogadva és tekintetbe véve, hogy az I., III., IV., V., VI. halmazok négy utóbbija a sorban előtte levőnek része

$$0 \leq T_1 = T_2 < T_3 < T_4 < T_5 < T_6$$

nyeretik. Így, míg az ellenkező kimutatva nincs, nem lehetetlen, hogy a legáltalánosabb R -nél T_2 véges, míg T_3 végtelen.¹

A T_1, \dots, T_6 értékek bármelyikét fogadva el a terület definíciójául² három kérdés tehető.

I. *Melyek azok a felületek, a melyek területe véges?*

II. *Mikép képezendő a terület értéke az $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ függvények segítségével?*

¹ Szerző legújabb vizsgálatai alapján $T_1 = T_4$ általános érvényességű. A T_2 -öt definiáló polyedersorozat polyederei általában nincsenek a felületbe írva s e sorozat egyenletesen konvergál a felület felé. A T_3 polyederei a felületbe irottak, de sorozatuk nem konvergál egyenletesen a felület felé. A T_4 polyederei a felületbe irottak s a felület felé egyenletesen konvergálnak.

² T_2 a LEBESGUE-féle definíció, T_3 a szerző által 1906-ban adott definíció.

III. *Hogy quadrálendő a felület? azaz mikép kell szerkeszteni azon Δ_r sorozatot, a melyre $\lim_{r=\infty} \Delta_r$ a területtel egyenlő?*¹

E három kérdésre egész 1906-ig egyes specziális felületektől (mint henger, kúp, conoid, forgásfelület) eltekintve, csupán az esetben adatott kielégítő válasz, midőn az (1) képlet alkalmazható.

1902-ben LEBESGUE az I. kérdésre egy részleges választ adott, kimondván, hogy a rectifiabilis² felületnél T_2 véges.

¹ Tegyük fel, hogy $f^{(h)}$ ($h=1, 2, 3$) csak egyértékű, tehát általában nem határolt, nem folytonos, sőt akár olyan is, hogy $|f^{(h)}|$ értékei közt a $+\infty$ is előfordulhat. Azon pontokból álló S idomot, a melyek ξ, η, ζ koordinátái rendre $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ a felület definitiójánál említett második szempontból tekintve, két dimenziós idomnak nevezhetjük. S -nek is definiálhatjuk a területét.

Legyen $\varepsilon_r > 0$, $\lim_{r=\infty} \varepsilon_r = 0$. Defináljuk a P -ben értelmezett

$$\bar{f}_r^{(h)} \quad (h=1, 2, 3, r=1, 2, \dots)$$

függvényeket a következő módon. Ha

$$|f^{(h)}| \leq \frac{1}{\varepsilon_r}, \quad \bar{f}_r^{(h)} = f^{(h)}$$

legyen és ha

$$|f^{(h)}| > \frac{1}{\varepsilon_r}, \quad \bar{f}_r^{(h)} = \frac{f_r^{(h)}}{|f_r^{(h)}|} \cdot \frac{1}{\varepsilon_r}$$

legyen.

Legyen $w_r > 0$, $\lim_{r=\infty} w_r = 0$. Könnyen igazolható s az igazolást mellőzzük is, hogy vannak olyan a P -ben definiált, egyértékű, határolt és folytonos $\bar{f}_r^{(h)}$ függvények, hogy a $z = \bar{f}_r^{(h)}$ idom bármely pontjához is van a $z = \bar{f}_r^{(h)}$ felületnek w_r -nél közelebb eső pontja.

Legyen $\delta_r > 0$, $\lim_{r=\infty} \delta_r = 0$. Írjunk be a

$$\xi = \bar{f}_r^{(1)}, \quad \eta = \bar{f}_r^{(2)}, \quad \zeta = \bar{f}_r^{(3)}$$

felületbe a δ_r segítségével egy Δ_r polyedert úgy, miként fentebb az R_r -be iratott.

A legkisebb $\lim_{r=\infty} \Delta_r$ definiálható S területeképp. Szűkebb definitiók is adhatók s az I., II., III. kérdések megfelelői itt is fölvetetők.

² LEBESGUE rectifiabilisnak az R azon osztályát nevezi, a melynél az xy sík minden véges ívhosszú görbéjének a felületen megfelelő görbéje szintén véges ívhosszú. Kimutatja, hogy erre szükséges és elégséges, hogy

Szerző 1906-ban T_3 -at fogadva el definitió gyanánt, arra a rectifiabilis felületre nézve, a melynek egyenletei

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = f^{(3)}(x, y)$$

mindhárom problémát megoldotta és találta, hogy

$$T_3 = t$$

itt t egy később közlendő érték, a mely könnyen képezhető az $f^{(3)}$ függvényből.

E felület nyilván congruens a $z = f^{(3)}(x, y)$ segédfelületével. Ele ezentúl $z = f(x, y)$ lesz.

Célunk a rectifiabilis $z = f(x, y)$ -ra vonatkozó vizsgálatok¹ közlése.

A követendő eljárás legfőbb vonásaiban a következő:

Képezünk egy t jelű értéket (I. II. fej.). Kimutatjuk, hogy T_1 a t -nél kisebb nem lehet. Szerkesztünk egy Δ_r sorozatot, a mely olyan, mint az (1) képletnél leírt és kimutatjuk, hogy

$f^{(h)}$ ($h=1, 2, 3$) eleget tegyen a LIPSCHITZ-féle feltételnek, azaz létezzék egy véges és positiv G állandó, úgy hogy ha $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 > 0$

$$\left| \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| < G$$

álljon.

Könnyű kimutatni, hogy e felületnél T_0 véges. Ugyanis vegyünk fel oly Δ_r sorozatot mint az (1) képletnél, de úgy, hogy a P r^2 számú oly parallelogrammra legyen bontva, a melyek oldalai $\frac{a}{r}$ és $\frac{b}{r}$ hosszúságúak. A LIPSCHITZ-féle feltételből következik, hogy a Δ_r azon élei, a melyek az $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ hosszúságú vonaldarabhoz «tartoznak» legfeljebb $3^{\frac{1}{2}} \cdot G \cdot \frac{a}{r}$, illetve $3^{\frac{1}{2}} \cdot G \cdot \frac{b}{r}$ nagyságúak.

Így

$$\Delta_r t \leq 2r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot G \cdot \frac{a}{r} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot G \cdot \frac{b}{r} = 3 \cdot G^2 \cdot a \cdot b.$$

Azaz az ily $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r t$ értékek közt végesek is vannak és e Δ_r sorozat a VI. halmaz eleme. Tehát T_0 véges.

¹ E vizsgálatok kellő általánosítása azóta a nem rectifiabilis $z = f(x, y)$ felületre vonatkozó három probléma megoldásához vezetett.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r t = t.$$

így

$$T_1 = T_6 = t.$$

Mellékes eredménykép a III. problémát az általános rectifabilis felületre vonatkozólag is megoldjuk. Találjuk, hogy

$$T_1 = T_6.$$

MÁSODIK FEJEZET.

Beosztások. Határértékek. A t érték. $T_1 \geq t$. A reguláris $z = f(x, y)$ quadraturája.

1. Legyenek

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_l = a$$

az x tengely $(0, a)$ intervallumán¹ fekvő pontok. Külön kiemeljük, hogy l véges szám. Az ezen pontok által képezett beosztás jele X_l legyen. Az x_i pontok a beosztás osztópontjai, az (x_i, x_{i+1}) intervallumok intervallumai. Ha $X_{l_1}, X_{l_2}, \dots, X_{l_r}, \dots$, a beosztások egy sora felteszszük, hogy l_r az r -el együtt határtalanul nő és hogy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (x_{i+1} - x_i) = 0, \quad (i=0, \dots, l_r-1).$$

Az X_{l_r} sorozatot elsőfajúnak nevezzük, ha X_{l_r} osztópontjai az $X_{l_{r+1}}$ -nek is osztópontjai.

2. Képezünk az X_l beosztás minden (x_i, x_{i+1}) ($i=0, \dots, l-1$) intervallumához egy $[i]$ jelű értéket.

$$\sum_0^{l-1} [i] \text{ helyébe } X_l [i] \text{ irassék.}$$

Ha $\lim_{r \rightarrow \infty} X_{l_r} [i]$ létező e ténynek s a limesnek a jele $X_{l_\infty} [i]$ lesz.

¹ Ha (x_1, x_2) íratik, felteszszük, hogy $x_1 < x_2$. (x_1, x_2) az x tengely azon x pontjaiból álló idomot jelenti, a melyekre $x_1 \leq x \leq x_2$. Ez idom neve intervallum, x_1 és x_2 az intervallum szélei, egyéb pontjai az intervallum belső pontjai. Hossza $x_2 - x_1$.

Ha még $X_{l_\infty} [i]$ minden X_{l_r} sorozatra ugyanaz, e ténynek s a limesnek a jele $X [i]$ lesz.

Jelentse (u, v) a $(0, a)$ egy intervallumát. ${}^u X'_{l_r} [i]$, jelentse amaz $[i]$ értékek összegét, a melyek megfelelő (x_i, x_{i+1}) intervalluma (u, v) be esik. ${}^u X''_{l_r} [i]$ jelentse amaz $[i]$ értékek összegét, a melyek megfelelő (x_i, x_{i+1}) intervallumának (u, v) -vel közös pöntja van.

Ha

$$\lim_{r=\infty} {}^u X'_{l_r} [i] \text{ és } \lim_{r=\infty} {}^u X''_{l_r} [i]$$

létezők és egyenlők e ténynek s a limesnek a jele ${}^u X_{l_\infty} [i]$ lesz. És ha még e limes minden beosztási sorozatra ugyanaz a jele ${}^u X^v [i]$ lesz.

Példák. a) Legyen $\varphi(x)$ egy a $(0, a)$ pontjaira értelmezett határolt, de nem szükségképen egyértékű függvény. Jelölje $g^\varphi(x', x'')$ a φ azon értékeinek alsó határát, a melyek x argumentuma (x', x'') -be esik.

${}^u X^v g^\varphi(x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ létező s mint ismeretes a neve φ -nek (u, v) -ben vett alsó integrálja. Jele

$$\int_u^v \varphi(x) dx.$$

Mint ismeretes

$$\int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^\xi \varphi(x) dx + \int_\xi^a \varphi(x) dx, \quad (0 < \xi < a).$$

Ha az X_{l_r} sorozat elsőfajú

$$X_{l_r} g^\varphi(x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq X_{l_{r+1}} g^\varphi(x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

b) Legyen $\varphi(x)$ még egyértékű és folytonos is.

$${}^u X^v [(x_{i+1} - x_i)^2 + (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))^2]^{\frac{1}{2}}, \quad {}^u X^v |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$$

létezők, az első érték nem kisebb a másodiknál, pozitív különbségük legfeljebb $v - u$, nevük $\varphi(x)$ ívhossza, illetve (teljes) ingadozása az (u, v) -ben. Az ívhossz $\geq v - u$, az ingadozás ≥ 0 .

$$[i] = [(x_{i+1} - x_i)^2 + (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))^2]^{\frac{1}{2}}, \text{ illetve } |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$$

téve áll, hogy

$$X[i] = {}^0X^\xi[i] + {}^\xi X^a[i] \quad (0 < \xi < a)$$

és ha az X_{l_r} sorozat elsőfajú

$$X_{l_r}[i] \leq X_{l_{r+1}}[i].$$

c) Jelentsen Q egy a $(0, a)$ -ba eső tetszőleges pontthalmazt. Legyen $[i] = x_{i+1} - x_i$, ha (x_i, x_{i+1}) a Q -nak legalább egy pontját tartalmazza, míg $[i] = 0$ vételessék, ha (x_i, x_{i+1}) a Q -nak egy pontját se tartalmazza. $X[i]$ létező s mint ismeretes nem más, mint a Q -nak (JORDAN-féle külső és lineáris) terjedelme. Q nem zárható oly véges számú intervallumok belsejébe, amelyek hosszainak összege a terjedelemtől kisebb.

3. Az y tengely

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_m = b$$

pontjai által képezett beosztása a $(0, b)$ -nek Y_m által jelöltesék. Egy Y_{m_r} beosztási sorozatról felteszszük, hogy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (y_{j+1} - y_j) = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, m_r - 1).$$

$Y_m[j]$, $Y_{m_\infty}[j]$, $Y[j]$, ${}^u Y^v[j]$ jelentései analogia alapján nyilvánvalók.

Vegyük fel egy X_l s egy Y_m beosztást. Az

$$x = x_i \quad (i = 1, \dots, l-1), \quad y = y_j \quad (j = 1, \dots, m-1)$$

vonalak a P -nek egy beosztását képezik. E beosztás jele $X_l Y_m$ lesz. Az $l \cdot m$ számú $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ parallelogrammát a beosztás parallelogrammainak nevezzük. $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ jele $a_{i,j}$ lesz. Ha $X_{l_r} Y_{m_r}$ egy beosztási sorozat, felteszszük, hogy az X_{l_r} és az Y_{m_r} sorozatok az 1. illetve 3. pontban leírt sajátyságot mutatják. A sorozat elsőfajú, ha az X_{l_r} és az Y_{m_r} sorozatok azok. $X_l Y_m[i, j]$, $X_{l_\infty} Y_{m_\infty}[i, j]$, $XY[i, j]$ jelentései analogia alapján világosak.

Míg az ellenkezőt ki nem mondjuk, beosztási sorozat alatt mindig elsőfajú sorozatot értünk.

4. A $z = f(x, y)$ felület nem lévén szükségkép rectifiabilis, legyenek

$$\overline{m}_r(x) = Y_{m_r} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|,$$

$$\overline{l}_r(y) = X_{l_r} |f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)|.$$

\overline{m}_r és \overline{l}_r nyilván a $(0, a)$, illetve $(0, b)$ pontjaira értelmezett egyértékű, határolt és folytonos függvények. A 2b) alapján

$$\overline{m}_r(x) \leq \overline{m}_{r+1}(x), \quad \overline{l}_r(y) \leq \overline{l}_{r+1}(y).$$

Jelöljük $J(x)$, illetve $J(y)$ a felület $x = \text{const.}$, illetve $y = \text{const.}$ metszeteinek az ingadozását. A 2b) alapján

$$\overline{m}_r(x) \leq J(x), \quad \overline{l}_r(y) \leq J(y),$$

$$\lim_{r=\infty} \overline{m}_r(x) = J(x), \quad \lim_{r=\infty} \overline{l}_r(y) = J(y).$$

A rectifiabilis $z = f(x, y)$ felületnél $J(x) \leq G \cdot b$, $J(y) \leq G \cdot a$. Ugyanis például (lásd 265. lap)

$$|f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| < G \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

s így

$$\overline{m}_r(x) = Y_{m_r} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| < Y_{m_r} G \cdot (y_{j+1} - y_j) = G \cdot b,$$

azaz

$$\lim_{r=\infty} \overline{m}_r(x) = J(x) \leq G \cdot b.$$

Legyenek

$$\alpha_{i,j} = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j),$$

$$\beta_{i,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| dx,^1$$

$$\gamma_{i,j} = \int_{y_j}^{y_{j+1}} |f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)| dy,$$

$$\tau_{i,j} = (\alpha_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

¹ $\alpha_{i,j}$ nyilván az $\alpha_{i,j}$ területe. $\beta_{i,j}$ pedig azon az xz síkba eső idom területe, a melyet a $z = f(x, y_j)$, $z = f(x, y_{j+1})$ görbéknek az $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ egyenesek közébe eső ívei s ezen egyenesek határolnak.

I. tétel. Az oly $z=f(x, y)$ felületnél, a melynél $J(x)$ és $J(y)$ határolt függvények

$$XY\tau_{i,j}$$

létező és véges.

Bebizonyítás.

a) Jelöljön J egy az $J(x)$ és $J(y)$ értékeinél nagyobb véges állandót. Legyen $X_{l_r}Y_{m_r}$ egy akármilyen beosztás. Állítom, hogy

$$X_{l_r}Y_{m_r}\tau_{i,j} < a \cdot b + J(a+b).$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} &\leq a_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j} \cdot \\ X_{l_r}Y_{m_r}a_{i,j} &= a \cdot b, \quad X_{l_r}Y_{m_r}\beta_{i,j} = \\ &= X_{l_r}Y_{m_r} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| dx = \\ &= X_{l_r} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (Y_{m_r} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|) dx \right) = \\ &= \int_0^a \overline{m}_r(x) dx < \int_0^a J \cdot dx = J \cdot a. \end{aligned}$$

Épp így

$$X_{l_r}Y_{m_r}\gamma_{i,j} < J \cdot b.$$

b) Ha az $X_{l_r}Y_{m_r}$ sorozat elsőfajú

$$X_{l_r}Y_{m_r}\tau_{i,j} \leq X_{l_{r+1}}Y_{m_{r+1}}\tau_{i,j}.$$

Legyenek ugyanis a_1, \dots, a_s az $X_{l_{r+1}}Y_{m_{r+1}}$ beosztás ama parallelogrammái, a melyek az $X_{l_r}Y_{m_r}$ beosztás $a_{i,j}$ parallelogrammájába esnek. Jelöljék a_1, \dots, a_s , β_1, \dots, β_s , $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $a_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$ analogonjait a_1, \dots, a_s -re vonatkozólag. Ez értékek geometriai jelentéséből világos, hogy

$$a_{i,j} = a_1 + \dots + a_s, \quad \beta_{i,j} \leq \beta_1 + \dots + \beta_s, \quad \gamma_{i,j} \leq \gamma_1 + \dots + \gamma_s.$$

Tehát

$$\tau_{i,j} \leq (a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)^{\frac{1}{2}} + \dots + (a_s^2 + \beta_s^2 + \gamma_s^2)^{\frac{1}{2}},^1$$

¹ Ha $A, B, C, a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_s$ nem negatívak és

$$A = a_1 + \dots + a_s, \quad B \leq b_1 + \dots + b_s, \quad C \leq c_1 + \dots + c_s,$$

$$(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} \leq (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)^{\frac{1}{2}} + \dots + (a_s^2 + b_s^2 + c_s^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j} \leq X_{l_r} Y_{m_r} [(a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)^{\frac{1}{2}} + \dots + (a_s^2 + \beta_s^2 + \gamma_s^2)^{\frac{1}{2}}] = \\ = X_{l_{r+1}} Y_{m_{r+1}} \tau_{i,j}.$$

c) Jelöljenek $X_{l_r} Y_{m_r}$, $X_{L_r} Y_{M_r}$ oly, akár nem elsőfajú, sorozatokat, hogy

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \tau_{i,j}, \quad X_{L_\infty} Y_{M_\infty} \tau_{i,j}$$

határozottak legyenek. Ez értékek a) alapján végesek. Kimutatjuk, hogy egyenlők.

Mert legyen, ha lehet, az első a nagyobb.

Jelentse $X_p Y_q$ azon beosztást, a mely áll az első sorozat r -ik s a második sorozat s -ik beosztásainak egyesítéséből.

r -et állandónak véve vegyük s -et oly nagyra, hogy az X_{l_r} minden (x_i, x_{i+1}) intervallumába X_{L_s} -nek s az Y_{m_r} minden (y_j, y_{j+1}) intervallumába az Y_{M_s} -nek legalább két pontja essék.

Legyenek e pontok közül az x_i, x_{i+1} -hez legközelebbiek x_i'', x_{i+1}' , az y_j, y_{j+1} -hez legközelebbiek y_j'', y_{j+1}' , (úgy hogy $x_i \leq x_i'' < x_{i+1}' \leq x_{i+1}, y_j \leq y_j'' < y_{j+1}' \leq y_{j+1}$).

Az $X_p Y_q \tau_{i,j}$ összeg, két részre bontható. Ezek egyike az $X_{L_s} Y_{M_s}$ azon parallelogrammáira vonatkozó $\tau_{i,j}$ -féle értékek összege, a melyek az $(x_i'', x_{i+1}'; y_j'', y_{j+1}')$ parallelogrammákba esnek. A másik rész, jele I legyen, az $X_p Y_q$ azon parallelogrammáira vonatkozó $\tau_{i,j}$ -féle értékek összege, a melyek az $(x_i', x_{i+1}'; 0, b)$ és a $(0, a; y_j', y_{j+1}')$ -féle sávokba esnek. (E sávok száma legfeljebb $l_r - 1$ illetőleg $m_r - 1$). A b) alapján

$$X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j} \leq X_p Y_q \tau_{i,j},$$

továbbá

$$X_p Y_q \tau_{i,j} \leq X_{L_s} Y_{M_s} \tau_{i,j} + I.$$

Azaz

$$X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j} \leq X_{L_s} Y_{M_s} \tau_{i,j} + I.$$

Ámde kimutatjuk, hogy ha s elég nagy I tetszőleges kicsi lehet, azaz

$$X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j} \leq X_{L_\infty} Y_{M_\infty} \tau_{i,j}$$

s így a feltétellel ellentétben

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \tau_{i,j} \leq X_{L_\infty} Y_{M_\infty} \tau_{i,j}$$

volna.

Tekintsük az $X_p Y_q$ -nak az $(x'_i, x''_i; 0, b)$ sávba eső parallelogrammaira képezett $\tau_{i,j}$ -féle értékek összegét. Tekintetbe véve, hogy

$$\tau_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j}$$

ugyane parallelogrammákra az $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ -féle értékek összegét tekintsük.

Az $\alpha_{i,j}$ -féle értékek összege nyilván $(x''_i - x'_i) \cdot b$.

A $\beta_{i,j}$ -féle értékek összege nyilván nem nagyobb, mint $J \cdot (x''_i - x'_i)$.

A $\gamma_{i,j}$ -féle értékek összege pedig

$$\int_0^b |f(x_i, y) - f(x'_i, y)| dy + \int_0^b |f(x''_i, y) - f(x_i, y)| dy.$$

Ha $x''_i - x'_i$ elég kicsi, azaz, ha s elég nagy e három érték tetszőleges kicsi lehet. Az első kettőre ez nyilvánvaló, a harmadikra nézve ez a felület folytonosságából következik.

Tehát a sávba eső parallelogrammákra képezett $\tau_{i,j}$ -féle értékek összege tetszőleges kicsi.

Mivel r s így $l_r - 1$ is állandó az $X_p Y_q$ -nak az összes $(x'_i, x''_i; 0, b)$ sávokba eső parallelogrammákra képezett $\tau_{i,j}$ -féle értékek összege tetszőleges kicsi lehet, ha csak s elég nagy. Épp így a $(0, a; y'_j, y''_j)$ sávokba eső parallelogrammákra nézve. Ámde, I nyilván nem nagyobb, mint e két érték összege. Azaz, ha s elég nagy, I tetszőleges kicsiny lehet.

Ezek után nyilvánvaló, hogy $XY\tau_{i,j}$ létező és véges. Ha ugyanis $X_{l_r} Y_{m_r}$ egy tetszőleges sorozat, bárhog is választásuk ki belőle a sorrend megtartásával egy oly $X_{l'_r} Y_{m'_r}$ sorozat, a melyre $X_{l'_\infty} Y_{m'_\infty} \tau_{i,j}$ meghatározott, ez érték az előbbieket szerint mindig ugyanaz és a) alapján véges.

Hasonlóképen mutatható ki, hogy

$$w = XY(\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}$$

létező és véges.

Jelöljük $t_{i,j}$ és $w_{i,j}$ azon értékeket, a melyek a $z = f(x, y)$

felület $a_{i,j}$ fölé ¹ eső részének segélyével épp úgy képeztetnek, mint t és w . Legyen még $v_{i,j} = (a_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}$.

II. tétel. J egy véges állandót jelentvén az $J(x) < J$, $J(y) < J$ által jellemzett $z = f(x, y)$ felületnél $T_1 \geq t$.

Ugyanis legyen Δ_r egy oly polyedersorozat, a melyre

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r t = T_1.$$

Legyen $\delta > 0$ és tetszőleges. Vegyünk fel oly $X_l Y_m$ beosztást, hogy

$$t - X_l Y_m \tau_{i,j} < \frac{\delta}{2}$$

álljon.

Jelölje $\Delta_r^{i,j}$ a Δ_r azon részét, a mely az $a_{i,j}$ belső pontjai fölé esik.

Jelöljék $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ a $\Delta_r^{i,j}$, xy , xz , yz síkokra való projectióinak területét.²

Ha r elég nagy

$$a_{i,j} < A_{i,j} + \frac{\delta}{6lm}, \quad \beta_{i,j} < B_{i,j} + \frac{\delta}{6lm}, \quad \gamma_{i,j} < C_{i,j} + \frac{\delta}{6lm}.$$

Vegyünk fel ugyanis oly nagy r -et, hogy δ_r (l. I. fejj.) kisebb legyen x_1 , $a - x_{l-1}$, y_1 , $b - y_{m-1}$ mindenikénél. Az Δ_r kerületének az xy síkra való projectiója így $(x_1, a - x_{l-1}; y_1, b - y_{m-1})$ -en kívül esik.

Legyen $1 \leq i < l - 1$, $1 \leq j < m - 1$.

Jelölje $\Delta_r^{i,j'}$ a Δ_r azon részét, a mely a $\Delta_r^{i,j}$ -ét Δ_r -é egészíti ki. Δ_r folytonos deformációval nyilván úgy változtatható, hogy $\Delta_r^{i,j}$ változatlan marad, míg $\Delta_r^{i,j'}$ úgy változik, hogy pontjainak az xy síkra való vetületei $a_{i,j}$ belsejébe nem jutnak, de e vetület végre az $(x_i - \delta_r, x_{i+1} + \delta_r; y_j - \delta_r, y_{j+1} + \delta_r)$ -be esik. Továbbá

¹ Feltehető, hogy $f > 0$, s így az $a_{i,j}$ fölé eső résznek határozott értelme van.

² Könnyen igazolható, hogy e projectióknak területük van, a mennyiben $\Delta_r^{i,j}$ végezzámú pont és törtvonal hozzácsatolása által, végezzámú polygonból álló idom lesz.

Δ_r e változás alatt az f_r^3 -ba irt oly polyeder maradhat, a melynek élei δ_r -nél kisebbek.

Legyen $\Delta_r^{i,j''}$ e véghelyzet. $\Delta_r^{i,j''}$ nyilván a $z = f_r^3 a_{i,j}$ felett fekvő darabjából folytonos deformáció által tekinthető keletkezettnek, a kerület a deformáció alatt mindig az eredeti kerületnek δ_r -nél kisebb környezetében maradván.

Ámde így $\Delta_r^{i,j''}$ a $z = f a_{i,j}$ felett fekvő darabjából folytonos deformáció által tekinthető keletkezettnek, a kerület a deformáció alatt mindig az eredeti kerületnek ε_r -nél kisebb környezetében maradván. Itt $\varepsilon_r > 0$ és $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_r = 0$.

Jelöljük $A'_{i,j}$, $B'_{i,j}$, $C'_{i,j}$, a $\Delta_r^{i,j''}$ xy , xz , yz , síkokra való projectióinak területét.

Ha r elég nagy (ε_r kicsisége és $\Delta_r^{i,j''}$ sajátosságai miatt) nyilván

$$a_{i,j} < A'_{i,j} + \frac{\delta}{12lm}, \quad \beta_{i,j} < B'_{i,j} + \frac{\delta}{12lm}, \quad \gamma_{i,j} < C'_{i,j} + \frac{\delta}{12lm}$$

és

$$|A'_{i,j} - A_{i,j}| < \frac{\delta}{12lm}, \quad |B'_{i,j} - B_{i,j}| < \frac{\delta}{12lm}, \quad |C'_{i,j} - C_{i,j}| < \frac{\delta}{12lm}$$

Azaz

$$\alpha_{i,j} < A_{i,j} + \frac{\delta}{6lm}, \quad \beta_{i,j} < B_{i,j} + \frac{\delta}{6lm}, \quad \gamma_{i,j} < C_{i,j} + \frac{\delta}{6lm},$$

és hasonló módon igazolható, hogy ez egyenlőtlenségek, ha csak r elég nagy, akkor is helyesek, ha $1 \leq i < l-1$, $1 \leq j < m-1$ nem is érvényesek.

Jelölje $\Delta_r^{i,j}t$, $\Delta_r^{i,j}$ területét.

Nyilván

$$\Delta_r^{i,j}t \geq (A_{i,j}^2 + B_{i,j}^2 + C_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} > (\alpha_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\delta}{2lm} \cdot^1$$

$$\Delta_r^{i,j}t \geq X_l Y_m \Delta_r^{i,j}t > X_l Y_m \tau_{i,j} - \frac{\delta}{2} > t - \delta.$$

$$\begin{aligned} {}^1 (\alpha_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} &< \left[\left(A_{i,j} + \frac{\delta}{6lm} \right)^2 + \left(B_{i,j} + \frac{\delta}{6lm} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(C_{i,j} + \frac{\delta}{6lm} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq (A_{i,j}^2 + B_{i,j}^2 + C_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta}{2lm}. \end{aligned}$$

Az $r=\infty$ határra $\delta=0$ vehető s így

$$T_1 = \lim_{r=\infty} \Delta_r t \geq t.$$

III. tétel. Az előbbi $z = f(x, y)$ felületnél T_6 s így T_1 (l. I. fej.) is véges.

Jelöljük az $x_i, y_j, x_i, y_{j+1}, x_{i+1}, y_{j+1}, x_{i+1}, y_j$ pontok megfelelő pontjait A, B, C, D -vel.

Legyen $X_{l_r} Y_{m_r}$ egy beosztási sorozat. Azon Δ_r polyeder-sorozat, a melynek r -ik tagja a $2 \cdot l_r \cdot m_r$ számú ABC, ADC háromszögből áll, nyilván a VI. halmaz eleme. Áll, hogy:

$$\Delta_r t = X_{l_r} Y_{m_r} (ABC + ADC) \leq a \cdot b + J(a + b),$$

s így (lásd 265. lap) T_6 véges.

Az állított viszony helyes, mert:

$$ABC + ADC \leq (A_1 B_1 C_1 + A_1 D_1 C_1) + (A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2) + \\ + (A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3),^1$$

$$X_{l_r} Y_{m_r} (A_1 B_1 C_1 + A_1 D_1 C_1) = a \cdot b,$$

$$X_{l_r} Y_{m_r} (A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2) = X_{l_r} Y_{m_r}^{\frac{1}{2}} \cdot (\overline{A_2 B_2} + \overline{D_2 C_2}) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \\ = \frac{1}{2} X_{l_r} [Y_{m_r} (\overline{A_2 B_2} + \overline{D_2 C_2}) \cdot (x_{i+1} - x_i)] = \\ = \frac{1}{2} X_{l_r} (\overline{m_r}(x_i) + \overline{m_r}(x_{i+1})) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\ \leq \frac{1}{2} X_{l_r} 2 \cdot J \cdot (x_{i+1} - x_i) = J \cdot a.$$

Épp így

$$X_{l_r} Y_{m_r} (A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3) \leq J \cdot b.$$

IV. tétel. Az $A_2 B_2 C_2 D_2$ négyszög kerülete által bezárt idom területét $b_{i,j}$ jelölje.² Jelölje $c_{i,j}$ az $A_3 B_3 C_3 D_3$ négyszög kerülete által bezárt idom területét. Legyen

¹ Ha M egy pont M_1, M_2, M_3 jelölik az xy, xz, yz síkokra való projectióit.

² Ha az $\overline{A_2 D_2}$ és $\overline{B_2 C_2}$ távolságoknak közös belső pontja nincs úgy

$$b_{i,j} = \frac{1}{2} (\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2}) \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

míg ha egy közös O_2 pontjuk van

$$b_{i,j} = A_2 O_2 B_2 + C_2 O_2 D_2.$$

Legyenek

$$n_{i,j} = (a_{i,j}^2 + b_{i,j}^2 + c_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$b'_{i,j} = \frac{1}{2} (A_2 \overline{B_2} + \overline{D_2} C_2) \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

$$c'_{i,j} = \frac{1}{2} (A_3 \overline{D_3} + \overline{B_3} C_3) \cdot (y_{j+1} - y_j),$$

$$n'_{i,j} = (a_{i,j}^2 + b_{i,j}'^2 + c_{i,j}'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nyilván

$$n'_{i,j} \geq n_{i,j},$$

mert

$$b'_{i,j} \geq b_{i,j}, \quad c'_{i,j} \geq c_{i,j}.$$

Ha $X_{l_r} Y_{m_r}$ egy akármilyen sorozat az $X_{l_r} Y_{m_r} n_{i,j}$, s annál inkább az $X_{l_r} Y_{m_r} n'_{i,j}$ értékek sorának egy határértéke se lehet kisebb mint t .

E tételre nagyobb szükségünk nincs, azért bizonyítását mellőzzük.

5. A *rectifiabilis* $z = f(x, y)$ quadraturájánál követendő eljárás jelzése.

Jelölje θ_1 azon idom területét, a melyet az $x = x_i$ síkban az \overline{AB} húr és az \widehat{AB} ív zárnak be. E terület értéke

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} |f(x_i, y) - \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y - y_j) - f(x_i, y_j)| dy.$$

Jelentsék $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ a \overline{BC} és \widehat{BC} , \overline{CD} és \widehat{CD} , \overline{DA} és \widehat{DA} által bezárt területeket.

Egyszerű geometriai úton

$$|b_{i,j} - \beta_{i,j}| \leq \theta_2 + \theta_4, \quad |c_{i,j} - \gamma_{i,j}| \leq \theta_1 + \theta_3$$

nyeretnek. Így

$$|n_{i,j} - \tau_{i,j}| \leq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4.^1$$

¹ $n_{i,j} \leq [a_{i,j}^2 + (\beta_{i,j} + |b_{i,j} - \beta_{i,j}|)^2 + (\gamma_{i,j} + |c_{i,j} - \gamma_{i,j}|)^2]^{\frac{1}{2}} \leq [a_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} + |b_{i,j} - \beta_{i,j}| + |c_{i,j} - \gamma_{i,j}| \leq \tau_{i,j} + (\theta_2 + \theta_4) + (\theta_1 + \theta_3),$
épp így

azaz

$$\tau_{i,j} \leq n_{i,j} + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4,$$

$$|n_{i,j} - \tau_{i,j}| \leq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4.$$

A harmadik és negyedik fejezetben ki fogjuk mutatni, hogy a rectifiabilis $z=f(x, y)$ felülethez lehet oly $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozatot találni, a melyre

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0. \quad (1)$$

Ekként

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} |n_{i,j} - \tau_{i,j}| = 0$$

és mivel (l. 4. I.)

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (t_{i,j} - \tau_{i,j}) = 0,$$

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} |n_{i,j} - t_{i,j}| = 0. \quad (a)$$

nyeretik.

Jelölje B' azon pontot, a mely az A, C, D pontokkal egy oly parallelogrammot képez, a melynek B' és D átellenes csúcsai. $B' x, y$, coordinátái így x_i, y_{j+1} .

Egyszerű geometriai úton nyilvánvaló, hogy

$$(A_1 B'_1 C_1 D_1) = a_{i,j}, \quad |b_{i,j} - (A_2 B'_2 C_2 D_2)| \leq BB'C,$$

$$|c_{i,j} - A_3 B'_3 C_3 D_3| \leq ABB'.$$

Így

$$|(AB'CD) - n_{i,j}| \leq ABB' + BB'C$$

nyeretik.

Ámde

$$(ABC + ADC) - (AB'CD) = |ABC - AB'C| \leq ABB' + BB'C,$$

azaz

$$(ABC + ADC) - n_{i,j} \leq 2(ABB' + BB'C).^1$$

A harmadik és negyedik fejezetben kimutatjuk, hogy a rectifiabilis $z=f(x, y)$ felülethez található oly $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozat, a melyre az (1)-en kívül még

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABB' + BB'C) = 0 \quad (2)$$

áll.

Így

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} ((ABC + ADC) - n_{i,j}) = 0$$

s az (a) segítségével

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} |(ABC + ADC) - t_{i,j}| = 0,$$

¹ $ABC + ADC \geq n_{i,j}$.

azaz

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = t,$$

vagyis (4. II.)

$$T_6 = t = T_1.^1$$

6. Az (1) és (2) kimutatása regularis $z = f(x, y)$ esetén.

Tegyük fel, hogy $b = a$ és $z = f(x, y)$ regularis. Legyen

$$l_r = m_r, \quad x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = \frac{a}{l_r},$$

$$(i=0, \dots, l_r-1, j=0, \dots, m_r-1).$$

θ_1 nyilván nem nagyobb mint azon az $x = x_i$ síkban fekvő ellipszis területe, a melynek gyújtópontjai A és B és nagy tengelye az ív \widehat{AB} hossza. Ugyanis \overline{AB} nincs az ellipszisen kívül, de \widehat{AB} se. Mert ha \widehat{AB} -nek az ellipszisen kívül egy P pontja lenne $\overline{AP} + \overline{PB} > \widehat{AB}$ volna, de ez lehetetlen, mert az ívhossz definitiója alapján $\overline{AP} + \overline{PB} \leq \widehat{AB}$.

Tehát θ_1 az ellipszisen nincs kívül s így:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\leq \pi \cdot \frac{\widehat{AB}}{2} \cdot \left(\left(\frac{\widehat{AB}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{4} \cdot \widehat{AB} \cdot (\widehat{AB} + \overline{AB})^{\frac{1}{2}} \cdot (\widehat{AB} - \overline{AB})^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{4} \cdot \widehat{AB} (\widehat{AB} + \overline{AB})^{\frac{1}{2}} \cdot (\widehat{AB} - \overline{AB})^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \cdot \widehat{AB}^{\frac{3}{2}} \cdot (\widehat{AB} - \overline{AB})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Így

$$X_{l_r} Y_{m_r} \theta_1 \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \cdot X_{l_r} Y_{m_r} (\widehat{AB}^{\frac{3}{2}} - \overline{AB}^{\frac{3}{2}}).$$

Ha $\frac{a}{l_r}$ elsőrendű végtelen kicsinek vétetik, \widehat{AB} is az, mert a felület regularis. $\widehat{AB} - \overline{AB}$ pedig mint ismeretes, harmadrendű. Így ha C egy elég nagy pozitív állandó

$$\widehat{AB} < \frac{C}{l_r}, \quad \widehat{AB} - \overline{AB} < \frac{C}{l_r^3}.$$

¹ $ABC + ADC \geq n'_{i,j} \geq n_{i,j}$, s így a 4. IV. alapján

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} n'_{i,j} = X_{l_\infty} Y_{m_\infty} n_{i,j} = t.$$

Azaz

$$X_{l_r} Y_{m_r} \theta_1 \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \cdot l_r^2 \cdot \frac{C^{\frac{3}{2}}}{l_r^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{C^{\frac{1}{2}}}{l_r^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \cdot \frac{C^2}{l_r},$$

vagyis

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \theta_1 = 0,$$

és ép így

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \theta_2, \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \theta_3, \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \theta_4$$

is zérusok s ekként (1) igazolva van.

(2) igazolása; $\overline{AB} \leq \widehat{AB}$, $\overline{BC} \leq \widehat{BC}$ miatt \overline{AB} , \overline{BC} kisebbek $\frac{C}{l_r}$ -nél. Ismeretes továbbá, hogy $\overline{BB'}$ legfeljebb másodrendű

$$\left(\overline{BB'} < \frac{C}{l_r^2} \right).$$

Így

$$\begin{aligned} X_{l_r} Y_{m_r} (ABB' + BB'C) &\leq X_{l_r} Y_{m_r}^{\frac{1}{2}} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{BB'} < \\ &< X_{l_r} Y_{m_r} \frac{C}{l_r} \cdot \frac{C}{l_r} = \frac{C^2}{l_r}, \end{aligned}$$

azaz

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABB' + BB'C) = 0.$$

Czélunk oly $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozatot találni, a melyre a rectifiabilis $z = f(x, y)$ -nál (1) és (2) állanak. E sorozat képezése lesz tárgya a következő két fejezetnek.

HARMADIK FEJEZET.

A $z = f(x, y)$ $x = \text{const.}$ $y = \text{const.}$ metszeteinek ívhosszáról. Partialis quadratura. Speciális rectifiabilis felületek quadraturája. Az általános rectifiabilis $z = f(x, y)$ felületnél követendő út jelzése.

1. A $z = f(x, y)$ $x = \text{const.}$ $y = \text{const.}$ metszeteinek ívhosszá-ról. Legyenek

$$m_r(x) = Y_{m_r} [(y_{j+1} - y_j)^2 + (f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j))^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$l_r(y) = X_{l_r} [(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y))^2]^{\frac{1}{2}}.$$

$m_r(x)$ és $l_r(y)$ nyilván a $(0, a)$, illetve $(0, b)$ -ben definiált egyértékű, határolt és folytonos függvények. Továbbá

$$m_r(x) \leq m_{r+1}(x), \quad l_r(y) \leq l_{r+1}(y).$$

Ha pedig a felület $x = \text{const.}$ $y = \text{const.}$ metszeteinek ívhossza $S(x)$, illetve $S(y)$.

$$S(x) = \lim_{r=\infty} m_r(x), \quad S(y) = \lim_{r=\infty} l_r(y).$$

Az $S(x)$ függvény általában nem határolt. $S(x)$ a következő sajátsággal bír.

Bármilyen előre adott pozitív δ -hoz s a $(0, a)$ bármilyen x' pontjához is van oly pozitív ε és η (a melyek a δ -án kívül az x' -től is függenek), úgy hogy az $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ intervallumba eső x pontokra

$$S(x') - S(x) < \delta.$$

Ugyanis vegyünk fel oly nagy r -et, hogy

$$S(x') - m_r(x') < \frac{\delta}{2} \quad \left(+\infty - w = \frac{1}{w} ! \right)$$

álljon.

Az $m_r(x)$ függvény folytonos, tehát van oly pozitív ε és η , hogy az $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ minden pontjára

$$|m_r(x) - m_r(x')| < \frac{\delta}{2}.$$

Tehát az $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ minden pontjára

$$S(x') - m_r(x) < \delta$$

és $m_r(x) \leq S(x)$ miatt

$$S(x') - S(x) < \delta.$$

$S(x)$ -re ezenkívül még

$$S(x) = g^S(x).^1$$

áll.

Ugyanis az előbbieik szerint, ha x' a $(0, a)$ egy pontja és $\delta > 0$ előre adott, van oly $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, hogy az $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ minden pontjára

$$S(x') - S(x) < \delta.$$

¹ Ha φ egy a $(0, a)$ -ban definiált (nem szükségképp egyértékű és határolt) függvény, úgy $\lim_{\varepsilon+\eta=0} g^\varphi(x-\varepsilon, x+\eta)$ minden x -re létező. Jele $g^\varphi(x)$ legyen.

WEIERSTRASS egy közismert tétele szerint pedig van az $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ -ban legalább egy x'' pont, úgy hogy

$$S(x'') < g^S(x' - \varepsilon, x' + \eta) + \delta.$$

Ámde

$$S(x') < S(x'') + \delta$$

s így

$$S(x') < g^S(x' - \varepsilon, x' + \eta) + 2\delta.$$

Közelítsük δ -át a zérus felé. $\varepsilon + \eta$ ekkor nem közeledik szükségképp a zérus felé, de közelíthető s nyilván akár szükség okából, akár nem, közeledik a zérus felé az utóbbi egyenlőtlenség helyes marad. Így

$$S(x') \leq g^S(x'),$$

de

$$S(x') < g^S(x')$$

nyilván lehetetlen, azaz $S(x') = g^S(x')$.

Az oly φ függvényt, a melyre

$$\varphi(x) = g^{\varphi}(x)$$

BAIRE alulról folytonosnak nevezni. Látnivaló, hogy ha $\varphi(x)$ az $S(x)$ első sajátságát mutatja,¹ úgy alulról folytonos, ámde fordítva is az alulról folytonos függvény $S(x)$ első sajátságát mutatja.

Mert ha $\varphi(x) = g^{\varphi}(x)$ és $\delta > 0$ és előre adott, bármily x' -hez is van oly pozitív ε és η , hogy

$$\varphi(x') - g^{\varphi}(x' - \varepsilon, x' + \eta) < \delta,$$

ámde az $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ minden pontjára

$$\varphi(x) \geq g^{\varphi}(x' - \varepsilon, x' + \eta)$$

s így

$$\varphi(x') - \varphi(x) < \delta.$$

Az általános alulról folytonos függvény még ha határolt is, nem folytonos. Például legyen ha $x \neq \frac{a}{2}$, $\varphi(x) = 2$, míg ha $x = \frac{a}{2}$ legyen $\varphi(x) = 1$. $\varphi(x)$ nyilván alulról folytonos és szakadós.

¹ Kiemelendő, hogy $\varphi(x)$ -nek mint $S(x)$ -nek egyértékűnek kell lennie.

Kellően választott példákkal igazolható, hogy az általános alulról folytonos függvény még csak nem is integrálható a $(0, a)$ egy rész intervallumában se. Kérdés, lehet-e $S(x)$ egy általános alulról folytonos függvényenyl egyenlő? Egy megszorítás $S(x)$ -re nézve nyilván van és ez az, hogy $S(x) \geq b$.

Más megszorítás azonban nincs, annyi legalább is ki van mutatva (egy más munkámban), hogy ha $\varphi(x) \geq b$ határolt és alulról folytonos, van oly $z = f(x, y)$, a melynél $S(x) = \varphi(x)$.

Hasonló megfontolások érvényesek $S(y)$, $J(x)$, $J(y)$ -ra is.

2. *Partialis quadratura.* A következőkben felteszszük, hogy $b=a$, $S(x)$ és $S(y)$ folytonosak és határoltak. Jelöljön K egy oly véges állandót, hogy $S(x) < K$, $S(y) < K$.¹ Még ezen igen speciális felületnél (ha csak nem rectifiabilis) se lehet oly $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozatot találni, a melyre

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0$$

volna. Ámde: lehet oly $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozatot találni, a melyre

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (1 - \lambda_{i,j}) \cdot a_{i,j} = 0, \quad (\alpha)$$

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} \cdot (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0 \quad (\beta)$$

itt $\lambda_{i,j}$ értéke bizonyos parallelogrammokra zérus, a többiekre egy.

Ugyane sorozat még olyan is lehet, hogy

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} (ABB' + BB'C) = 0. \quad (\gamma)$$

Ekként e sorozatra

$$(1. \text{ II. fej. } 5.).^2 \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} |(ABC + ADC) - t_{i,j}| = 0$$

¹ E felületnél $J(x)$ és $J(y)$ is határoltak, mert $J(x) < S(x)$, $J(y) < S(y)$. Továbbá e felületnél még $J(x)$ és $J(y)$ is folytonosak, a mennyiben a mint ezt bizonyítás nélkül közöljük, ha $S(x)$, $x=x'$ -re folytonos $J(x)$ is folytonos $x=x'$ -re és hasonló áll $S(y)$ és $J(y)$ -ra is.

² Ha $\lambda_{i,j}$ értéke minden parallelogrammára 1 volna, nyilván

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = t$$

s így

$$T_6 = t = T_1$$

volna. Azaz a szövegbeli $z=f(x, y)$ quadraturája teljesen befejezett lenne, míg a szövegben ez nincs így. E körülmény teszi jogossá a partialis quadratura nevet, az $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozat alkalmas a partialis quadraturára, ha reá nézve (α) , (β) , (γ) állanak.

Bizonyítás.

a) $X_{l_r} Y_{m_r}$ képezése.

Legyenek λ és w előre adott pozitív számok. Legyen $X_{L_s} Y_{M_s}$ egy oly beosztási sorozat, hogy

$$M_s = L_s, \quad x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = \frac{a}{L_s},$$

$$(i=0, \dots, L_s-1, j=0, \dots, M_s-1)$$

álljon.

$S(x)$ határolt és folytonos és

$$S(x) \geq M_{s+1}(x) \geq M_s(x), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} M_s(x) = S(x).$$

Így ha s elég nagy

$$0 \leq S(x) - M_s(x) < \lambda.$$

Épp így az elég nagy s -ekre

$$0 \leq S(y) - L_s(y) < \lambda.$$

Továbbá (I. II. fejt. 4.)

$$X_{L_\infty} Y_{M_\infty}(w_{i,j} - v_{i,j}) = 0,$$

$$(w_{i,j} - v_{i,j}) \geq 0.$$

Azaz, ha s elég nagy az $X_{L_s} Y_{M_s}$ beosztásra

$$0 \leq S(x_i) - M_s(x_i) < \lambda, \quad 0 \leq S(y_j) - L_s(y_j) < \lambda,$$

$$X_{L_s} Y_{M_s}(w_{i,j} - v_{i,j}) < w.$$

Legyen

$$\delta_r > 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \delta_r = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\delta_r^{\frac{1}{3}}}{\delta_{r-1}^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

úgy hogy még

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot \pi \cdot \frac{\delta_r^{\frac{1}{3}}}{\delta_{r-1}^{\frac{2}{3}}} < \delta_{r-1}^s \quad (a)$$

legyen.¹

$\lambda = \delta_1, \delta_2, \dots, w = 1, \delta_1^s, \delta_2^s, \dots$ véve nyilvánvaló, hogy a fenti $X_{L_s} Y_{M_s}$ sorozatból kiválasztható egy $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozat, úgy hogy az $X_{l_r} Y_{m_r}$ beosztásra

$$S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r, \quad S(y_j) - l_r(y_j) < \delta_r,$$

$$X_{l_r} Y_{m_r}(w_{i,j} - v_{i,j}) < \delta_{r-1}^s, \quad (\delta_0 = 1) \quad (b)$$

áll.

¹ Feltehető még, hogy minden r -re $1 > \delta_r > \delta_{r+1}$.

Legyen $\lambda_{i,j}$ értéke zérus, ha az \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} , \widehat{DA} ívek legalább egyikének hossza nem kisebb, mint $\frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}$, míg $\lambda_{i,j}$ értéke egy legyen, ha ezen ívek mind kisebbek, mint $\frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}$.

(α) és (β) érvényesek, ha (α) és (β) nem is állanak. (γ) érvényes, ha (α) és (β) is megvalósulnak.

b) (α) és (β) állanak.

Az $x = x_i$ metszet E_i számú oly \widehat{AB} ívet tartalmazzon, a melyek hossza nem kisebb, mint $\frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}$. Nyilván

$$E_i \cdot \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}} \leq K,$$

s így

$$E_i \leq \{K\} \cdot l_r \cdot \delta_{r-1}.$$

Így azon paralelogrammák száma, a melyekre $\widehat{AB} \geq \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}$ miatt $\lambda_{i,j} = 0$

$$\leq \{K\} \cdot l_r^2 \cdot \delta_{r-1},$$

mert i értéke $0, 1, \dots, l_r - 1$ lehet.

Épp így azon paralelogrammák száma, a melyekre

$$\widehat{BC}, (\widehat{CD}, \widehat{DA}) \geq \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}$$

miatt $\lambda_{i,j} = 0$

$$\leq \{K\} \cdot l_r^2 \cdot \delta_{r-1}.$$

Azaz a $\lambda_{i,j}=0$ által jellemzett paralelogrammák száma

$$\leq \{4K\} \cdot l_r^2 \cdot \delta_{r-1}.$$

Egy-egy paralelogramma területe pedig $= \{a^2\} \cdot \frac{1}{l_r^2}$, így tehát

$$X_{l_r} Y_{m_r} (1 - \lambda_{i,j}) \cdot a_{i,j} \leq \{4a^2 K\} \cdot \delta_{r-1},$$

azaz

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (1 - \lambda_{i,j}) \cdot a_{i,j} = 0.$$

¹ Az $\leq^m, >^m, <^m$ jeleknél az m betű figyelmen kívül hagyandó. Az m jel jelentése s a feleslegesnek látszó $\{ \}$ alakú zárjelek alkalmazásának oka később (l. 5.) lesz megmagyarázva.

Ezzel (a) ki van mutatva, (b) kimutatására nézve elegendő kimutatni, hogy $X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} \cdot \theta_1 = 0$.

A II. fejezet 6. alapján

$$\theta_1 \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \cdot \frac{1}{l_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} \cdot (\widehat{AB} - \overline{AB})^{\frac{1}{2}}.$$

Így

$$Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot \theta_1 \leq \left\{ \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \right\} \cdot \frac{1}{l_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} \cdot Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot (\widehat{AB} - \overline{AB})^{\frac{1}{2}}.$$

Amde

$$Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot (\widehat{AB} - \overline{AB}) \leq Y_{m_r} (\widehat{AB} - \overline{AB}) = S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r,$$

s az $Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot (\widehat{AB} - \overline{AB})$ összeg $\widehat{AB} - \overline{AB}$ tagjainak a száma legfeljebb $\overset{m}{=} \{1\} l_r$. Így tehát¹

$$Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot (\widehat{AB} - \overline{AB})^{\frac{1}{2}} < \overset{m}{\{1\}} l_r^{\frac{1}{2}} \cdot \delta_r^{\frac{1}{2}}.$$

Ekként

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \theta_1 \leq l_r \cdot \left\{ \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \right\} \cdot \frac{1}{l_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} \cdot l_r^{\frac{1}{2}} \cdot \delta_r^{\frac{1}{2}} \overset{m}{=} \left\{ \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \right\} \cdot \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}},$$

azaz

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} \theta_1 \leq \left\{ \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \right\} \cdot \lim_{r=\infty} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} = 0$$

s így (b) is igazolva van.

c) (r) igazolása.

A) A $\lambda_{i,j} = 1$ által jellemzett parallelogrammákat három csoportba osztjuk.

Az első azokat tartalmazza, a melyekre

$$(w_{i,j} - v_{i,j}) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \geq \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6.$$

A fennmaradókból a másodikba azok tartoznak, a melyekre

$$l_r^2 \cdot b_{i,j} > \delta_{r-1}.$$

¹ Ha $\delta_1, \dots, \delta_q$ nem negatívak és $\delta_1 + \dots + \delta_q \leq \delta$,

$$\delta_1^{\frac{1}{2}} + \dots + \delta_q^{\frac{1}{2}} \leq q^{\frac{1}{2}} \cdot \delta^{\frac{1}{2}}.$$

A maradék tartozzék a harmadik csoportra. E parallelogrammákra

$$l_r^2 \cdot b_{i,j} \leq \delta_{r-1}.$$

A két utolsó csoportra tehát

$$w_{i,j} - v_{i,j} < \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 < \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6.$$

Az első csoport parallelogrammáinak L_r számára áll, hogy

$$\frac{L_r}{l_r^2} < \{2\}^m \cdot \delta_{r-1}^2.$$

Mert nyilván

$$L_r \cdot \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 \leq X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot [(w_{i,j} - v_{i,j}) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)].$$

Amde

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot (w_{i,j} - v_{i,j}) \leq X_{l_r} Y_{m_r} (w_{i,j} - v_{i,j}) < \delta_{r-1}^8,$$

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) < \{2\}^m \cdot \pi \cdot \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} < \delta_{r-1}^8.$$

Tehát

$$L_r \cdot \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 < \{2\}^m \cdot \delta_{r-1}^8,$$

azaz

$$L_r \cdot \frac{1}{l_r^2} < \{2\}^m \cdot \delta_{r-1}^2.^1$$

B) Ha r elég nagy, a második csoport parallelogrammáinál az $\overline{A_2 D_2}$ és $\overline{B_2 C_2}$ távolságoknak nincs közös pontja.

Tegyük fel, hogy $\overline{A_2 D_2}$ és $\overline{B_2 C_2}$ egy O_2 pontban, a melynek x koordinátája x' metszik egymást. Legyen például

$$x' - x_i \leq x_{i+1} - x'.$$

Az $x = x'$ egyenes $a_{i,j}$ -t két parallelogrammára bontja. Ezek közül annak, a mely a koordináták kezdőpontjától távolabb van a területe legalább is $\frac{a_{i,j}}{2}$.

¹ Így $L_r \cdot \alpha_{i,j} < \{2a^3\} \cdot \delta_{r-1}^2$. Az első csoport parallelogrammáira $\lambda_{i,j}=1$ helyébe $\lambda_{i,j}=0$ véve (α) , (β) , (γ) érvényesek maradnak.

Ezen parallelogrammra a $w_{i,j}-v_{i,j}$ analógiájára képezett érték kisebb, mint $\frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6$.

Ugyanis a második csoport parallelogrammaira

$$w_{i,j}-v_{i,j} < \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6$$

és láttuk a második fejezetben, hogy ha egy parallelogramma több más parallelogrammra bontatik az ezekre képezett $w_{i,j}-v_{i,j}$ -féle értékek összege, nem nagyobb mint az egész parallelogrammra képezett hasonló érték.

Oszzuk e parallelogrammát az $x = \frac{x' + x_{i+1}}{2}$ egyenes segítségével két egyenlő részre. E két részre az $a_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ -féle értékek α , β_1 , α , β_2 legyenek, β_1 azon részre vonatkozóan, a mely a coordináták kezdőpontjához közelebb esik.

A két egyenlő részre osztott parallelogrammra az $a_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ -féle értékek nyilván 2α , $\beta_1 + \beta_2$.

Az

$$[\alpha^2 + \beta_1^2]^{\frac{1}{2}} + [\alpha^2 + \beta_2^2]^{\frac{1}{2}} = [(2\alpha)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2]^{\frac{1}{2}} + \lambda \quad (a)$$

egyenlőségben λ nem negatív és $\lambda < \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6$.¹

Ámde, ha C_1 az $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, C_2 az $(1, 2)$ bizonyos értéke

¹ $\lambda \geq 0$, mert egy parallelogrammát több más parallelogrammra bontva, az ezekre képezett $v_{i,j}$ -féle értékek összege nem kisebb mint az eredeti parallelogramm $v_{i,j}$ -féle értéke. (L. II. fej. 4. I. tét. b.) Jelöljük w_1 , w_2 -vel a két egyenlő parallelogrammra vonatkozó $w_{i,j}$ -féle értékeket. $v_{i,j}$ analógonjai az (a) baloldalán levő v_1 , v_2 négyzetgyökök. A két egyenlő részre bontott parallelogramma $w_{i,j}$ -féle értéke $w_1 + w_2$, $v_{i,j}$ -féle értéke pedig az (a) jobboldalán levő négyzetgyök v . A szövegben mondottak alapján

$$w_{i,j}-v_{i,j} \geq (w_1 + w_2) - v \geq w_1 - v_1 + w_2 - v_2 \geq 0.$$

Azaz

$$w_{i,j}-v_{i,j} \geq (w_1 + w_2) - v - [w_1 - v_1 + w_2 - v_2] = v_1 + v_2 - v = \lambda$$

és

$$w_{i,j}-v_{i,j} < \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6.$$

$$\alpha \stackrel{m}{=} \{C_1 \cdot a^2\} \cdot \frac{1}{l_r^2}, \quad \beta_1 \stackrel{m}{\leq} \{C_2 \cdot a\} \cdot \frac{1}{l_r^2 \cdot \delta_{r-1}}$$

$$\beta_2 \stackrel{m}{\leq} \{C_2 \cdot a\} \cdot \frac{1}{l_r^2 \cdot \delta_{r-1}},$$

$$\frac{a_{i,j}}{4} \leq \alpha \leq \frac{a_{i,j}}{2} \quad \text{miatt} \quad \frac{1}{4} \leq C_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Továbbá

$$1 < C_2 < 2.^1$$

Az (a) segítségével

$$|\beta_2 - \beta_1| \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{120}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^2} \quad \text{nyeretik.}$$

nyeretik.

¹ Áll, hogy $\beta_1 < w_{i,j}$, $\beta_2 < w_{i,j}$.

$$w_{i,j} = v_{i,j} + (w_{i,j} - v_{i,j}), \quad v_{i,j} = (\alpha_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha_{i,j} + \beta_{i,j}, \quad \beta_{i,j} \leq b_{i,j} + \theta_2 + \theta_4,$$

azaz

$$w_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + \theta_2 + \theta_4 + (w_{i,j} - v_{i,j}).$$

Továbbá

$$\alpha_{i,j} \stackrel{m}{=} \{a^2\} \cdot \frac{1}{l_r^2}, \quad b_{i,j} \leq \frac{1}{2} (\overline{A_2 B_2} + \overline{D_2 C_2}) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{DC}) \cdot \frac{a}{l_r} \stackrel{m}{\leq} \\ \leq \{a\} \cdot \frac{1}{l_r^2 \cdot \delta_{r-1}}, \quad (\overline{A_2 B_2} < \widehat{AB} < \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}, \quad \overline{D_2 C_2} < \widehat{DC} < \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}),$$

$$\theta_2 + \theta_4 < \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^5,$$

$$w_{i,j} - v_{i,j} < \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^5.$$

Azaz:

$$w_{i,j} \stackrel{m}{\leq} \{a^2\} \cdot \frac{1}{l_r^2} + \{a\} \cdot \frac{1}{l_r^2 \cdot \delta_{r-1}} + \frac{2}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^5 = \left\{ (a \delta_{r-1} + 1 + \frac{2 \cdot \delta_{r-1}^7}{a}) \cdot a \right\} \cdot \frac{1}{l_r^2 \cdot \delta_{r-1}}$$

és ha r elég nagy

$$1 < a \cdot \delta_{r-1} + 1 + \frac{2 \cdot \delta_{r-1}^7}{a} < 2.$$

² Ha A_1 , B_1 , A_2 , B_2 nem negatívak és

$$[A_1^2 + B_1^2]^{\frac{1}{2}} + [A_2^2 + B_2^2]^{\frac{1}{2}} = [(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2]^{\frac{1}{2}} + \lambda,$$

úgy λ nem negatív és

$$|A_1 B_2 - A_2 B_1| \leq 2 [A_1 A_2 + B_1 B_2]^{\frac{1}{2}} \cdot [(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} + \\ + [2 [A_1 A_2 + B_1 B_2]^{\frac{1}{2}} + [(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2]^{\frac{1}{2}}] \cdot \lambda + \lambda^2.$$

Egyszerű geometriai úton nyerjük, hogy

$$\beta_2 \geq \frac{3}{4} O_2 C_2 D_2 - \theta_2 - \theta_4, \quad \beta_1 \leq \frac{1}{4} O_2 C_2 D_2 + \theta_2 + \theta_4.$$

Továbbá

$$b_{i,j} > \frac{\partial_{r-1}}{l_r^2}, \quad O_2 C_2 D_2 \geq \frac{b_{i,j}}{2} \quad \text{s így} \quad O_2 C_2 D_2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial_{r-1}}{l_r^2},$$

továbbá

$$\theta_2 + \theta_4 < \frac{1}{l_r^2} \cdot \partial_{r-1}^6.$$

Azaz, ha r elég nagy

$$\beta_2 \geq \frac{3}{4} \cdot O_2 C_2 D_2 - \theta_2 - \theta_4 > \frac{1}{4} \cdot O_2 C_2 D_2 + \theta_2 + \theta_4 \geq \beta_1,$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \cdot O_2 C_2 D_2 - 2(\theta_2 + \theta_4) \leq \beta_2 - \beta_1 \leq \left\{ \frac{120}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^2},$$

vagy

$$\left\{ \frac{1}{4} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}}{l_r^2} - \left\{ 2 \right\} \cdot \frac{1}{l_r^2} \cdot \partial_{r-1}^6 \leq \left\{ \frac{120}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^2},$$

Ha pedig D nem kisebb A_1, B_1, A_2, B_2 egyikénél se

$$|A_1 B_2 - A_2 B_1| \leq 8 \cdot (D^{\frac{3}{2}} \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} + D \cdot \lambda + \lambda^2).$$

$A_1 = A_2 = \alpha, B_1 = \beta_1, B_2 = \beta_2$ vétetvén $D = \{C_2 \cdot a\} \cdot \frac{1}{l_r^2 \cdot \delta_{r-1}}$ vehető, mert ha r elég nagy

$$\{C_1 \cdot a^2\} \cdot \frac{1}{l_r^2} < \{C_2 \cdot a\} \cdot \frac{1}{l_r^2 \cdot \delta_{r-1}}.$$

Továbbá $\lambda \leq \frac{1}{l_r^2} \cdot \delta_{r-1}^5$. Tehát (a)-ból

$$|\alpha \beta_2 - \alpha \beta_1| \leq \{8\} \cdot \left\{ (C_2 \cdot a)^{\frac{3}{2}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^4} + \{C_2 \cdot a\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^5}{l_r^4} + \frac{\delta_{r-1}^{12}}{l_r^4} \quad (\alpha)$$

nyeretik. Ha r elég nagy a második tag

$$\leq \{10 (C_2 a)^{\frac{3}{2}}\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^4}$$

és

$$C_2 < 2, \quad \alpha \geq \left\{ \frac{a^2}{4} \right\} \cdot \frac{1}{l_r^2}, \quad (\beta)$$

(α) és (β)-ból így

$$|\beta_2 - \beta_1| \leq \left\{ \frac{120}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^2}$$

nyeretik.

azaz

$$\left\{ \frac{1}{4} \right\} \cdot \delta_{r-1} - \left\{ 2 \right\} \cdot \delta_{r-1}^6 \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{120}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

de egy ily egyenlőtlenség $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_{r-1} = 0$ miatt, lehetetlen.

C) Jelöljük P , Q , R az első, második, harmadik csoportra vonatkozó $(ABB' + BB'C)$ -féle értékek összegét.

Kimutatjuk, hogy

$$P \stackrel{m}{\leq} \{4 \cdot a\} \cdot \delta_{r-1}, \quad Q \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{500}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}, \quad R \stackrel{m}{\leq} \{8\} \cdot \delta_{r-1}.$$

Először is $P \stackrel{m}{\leq} \{4 \cdot a\} \cdot \delta_{r-1}$.

Ugyanis

$$\overline{BB'} \leq \overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2} < \widehat{AB} + \widehat{CD} \stackrel{m}{<} \{2\} \cdot \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}.$$

$$\begin{aligned} ABB' + BB'C &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BB'} \cdot [(y_{j+1} - y_j) + (x_{i+1} - x_i)] \stackrel{m}{\leq} \\ &\stackrel{m}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \{2\} \cdot \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}} \cdot \{2a\} \cdot \frac{1}{l_r} \stackrel{m}{=} \{2a\} \cdot \frac{1}{l_r^2 \cdot \delta_{r-1}}. \end{aligned}$$

Az első csoport parallelogrammáinak száma L_r és

$$L_r \stackrel{m}{\leq} \{2\} \cdot l_r^2 \cdot \delta_{r-1}.$$

Igy

$$P \stackrel{m}{\leq} \{4 \cdot a\} \cdot \delta_{r-1}.$$

$$\text{Másodszor } Q \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{500}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Ezen esetben $\overline{A_2 D_2}$ és $\overline{B_2 C_2}$ egymást (l. B) nem metszik. Jelöljük $\overline{A_2 D_2}$ és $\overline{B_2 C_2}$ felezőpontjait E_2 , illetve F_2 .

Oszzuk $a_{i,j}$ -t az $x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ egyenes által két (egyenlő) részre és jelöljük β_1 és β_2 -vel az ezen két részre vonatkozó $\beta_{i,j}$ -féle értéket, β_1 a koordináták kezdőpontjához közelebbi részre vonatkozáván.

A B) alatti levezetést ismételve ($x' = x_i$)

$$|\beta_2 - \beta_1| \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{120}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^2}$$

nyeretik.

Egyszerű geometriai úton és tekintetbe véve, hogy $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_{r-1} = 0$

$$\begin{aligned} |(A_2 B_2 F_2 E_2) - (E_2 F_2 C_2 D_2)| &\leq |\beta_2 - \beta_1| + \theta_2 + \theta_4 \stackrel{m}{\leq} \\ &\stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{120}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^2} + \frac{\delta_{r-1}^6}{l_r^2} \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{125}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^2} \end{aligned}$$

nyeretik.

Tekintetbe véve, hogy

$$(A_2 B_2 F_2 E_2) = \frac{x_{i+1} - x_i}{4} \cdot (\overline{A_2 B_2} + \overline{F_2 E_2}),$$

$$(E_2 F_2 C_2 D_2) = \frac{x_{i+1} - x_i}{4} \cdot (\overline{F_2 E_2} + \overline{C_2 D_2}),$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{4} \stackrel{m}{=} \left\{ \frac{a}{4} \right\} \cdot \frac{1}{l_r}$$

a következő egyenlőtlenséget nyerjük:

$$|\overline{A_2 B_2} - \overline{C_2 D_2}| = \overline{BB'} \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{500}{a^{\frac{3}{2}}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} ABB' + BB'C &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BB'} \cdot [(y_{j+1} - y_j) + (x_{i+1} - x_i)] \stackrel{m}{\leq} \\ &\stackrel{m}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{500}{a^{\frac{3}{2}}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r} \cdot \{2 \cdot a\} \cdot \frac{1}{l_r} \stackrel{m}{=} \left\{ \frac{500}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{l_r^2}. \end{aligned}$$

A második csoport parallelogrammjainak a száma

$$\stackrel{m}{\leq} \{1\} \cdot l_r,$$

tehát

$$Q \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{500}{a^{\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Végül $R \stackrel{m}{\leq} \{8\} \cdot \delta_{r-1}$.

A harmadik csoportnál $l_r \cdot b_{i,j} \leq \delta_{r-1}$.

Az $\overline{A_2 D_2}$, $\overline{B_2 C_2}$ távolságoknak vagy van vagy nincs közös pontja.

Ha van, legyen e pont x coordinátája x' és legyen például $x' - x_i \leq x_{i+1} - x'$, ekkor $\overline{A_2 B_2} \leq \overline{C_2 D_2}$. Továbbá ekkor

$$b_{i,j} = \frac{1}{2}(x' - x_i) \cdot \overline{A_2 B_2} + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x') \cdot \overline{C_2 D_2} \leq \frac{\partial_{r-1}}{l_r^2},$$

$$x_{i+1} - x' \geq \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \stackrel{m}{=} \left\{ \frac{a}{2} \right\} \cdot \frac{1}{l_r}.$$

Tehát

$$\overline{C_2 D_2} \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{4}{a} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}}{l_r}.$$

Ez esetben

$$\overline{BB'} = \overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2},$$

azaz

$$\overline{BB'} \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{8}{a} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}}{l_r}.$$

Ha nincs közös pontjuk

$$b_{i,j} = \frac{1}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot (\overline{A_2 B_2} + \overline{D_2 C_2}) \leq \frac{\partial_{r-1}}{l_r^2},$$

$$\frac{1}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i) \stackrel{m}{=} \left\{ \frac{a}{2} \right\} \cdot \frac{1}{l_r},$$

$$\overline{A_2 B_2} + \overline{D_2 C_2} \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{4}{a} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}}{l_r}$$

s így annál inkább

$$\overline{BB'} = |\overline{A_2 B_2} - \overline{D_2 C_2}| \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{4}{a} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}}{l_r} < \left\{ \frac{8}{a} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}}{l_r}.$$

Azaz a harmadik csoportnál

$$\overline{BB'} \stackrel{m}{\leq} \left\{ \frac{8}{a} \right\} \cdot \frac{\partial_{r-1}}{l_r}$$

s miként előbb Q -ra nézve

$$R \stackrel{m}{\leq} \{8\} \cdot \partial_{r-1}.$$

A P , Q , R -re vonatkozó egyenlőtlenségeket tekintetbe véve nyilván

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} \cdot (ABB' + BB'C) = 0,$$

s így (γ) igazolva van.

3. Tegyük fel, hogy a 2. alatti felület rectifiabilis. Ekkor, a mint az könnyen igazolható \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} , \widehat{DA} nem nagyobbak, mint $(1 + G^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{l_r}$. Ha r elég nagy

$$(1 + G^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{l_r} \cdot \frac{m}{\delta r} < \frac{1}{\delta r - 1},$$

azaz e felületnél mindig $\lambda_{i,j} = 1$. Így e rectifiabilis felületre a második fejezet 5. pontja szerint az első fejezet három problémája megoldatott.

4. *Egy rectifiabilis R quadraturája.* Legyen $b=a$ és legyenek

$$\xi = f^{(1)}(x, y), \quad \eta = f^{(2)}(x, y), \quad \zeta = f^{(3)}(x, y)$$

egy rectifiabilis felület egyenletei.

$S^{(h)}(x)$ és $S^{(h)}(y)$ a $z=f^{(h)}(x, y)$ -ra vonatkozólag azok legyenek, a mik $S(x)$ és $S(y)$ a $z=f(x, y)$ -ra.

Az R $x = \text{const.}$ görbájének hosszát $s(x)$,¹ $y = \text{const.}$ görbájének hosszát $s(y)$ jelölje.

A LIPSCHITZ-féle feltétel folytán $s(x)$ és $s(y)$ határoltak. Az $S(x)$ -el való analogia alapján kimondható, hogy $s(x)$ és $s(y)$ alulról folytonos függvények.

Mi fellétszszük, hogy az $S^{(h)}(x)$, $S^{(h)}(y)$, $s(x)$, $s(y)$ függvények folytonosak.

Ezen rectifiabilis felületre vonatkozólag megoldjuk az első fejezet III. problémáját.

a) Jelöljék A_0 , B_0 , C_0 , D_0 az x_i , y_j , x_i , y_{j+1} , x_{i+1} , y_{j+1} , x_{i+1} , y_j pontok megfelelő pontjait.

Jelölje $R_{i,j}$ az R azon részét, a mely az $a_{i,j}$ -nek felel meg. $\widehat{A_0 B_0}$ jelölje az $a_{i,j}$ $x=x_i$ oldalának megfelelő ívet.

Fussuk be az $\widehat{A_0 B_0}$ ívet A_0 -tól B_0 felé és fussuk be az $\widehat{A_0 B_0}$ húrt A_0 -tól B_0 felé, úgy hogy a két mozgó pont A_0 -ból egyidejűleg indulva ki B_0 -ba egyidejűleg érjen.

A két mozgó pont egyidejű helyzeteit egy-egy egyenes távolsággal kössük össze. Jelölje $\theta^{(1)}$ az így keletkezett egyenes vonalú felületet.

A $\widehat{B_0 C_0}$, $\widehat{C_0 D_0}$, $\widehat{D_0 A_0}$ ívek segítségével hasonló módon képezett felületeket $\theta^{(2)}$, $\theta^{(3)}$, $\theta^{(4)}$ jelöljék.

¹ $s(x) = Y[(f^{(1)}(x, y_{j+1}) - f^{(1)}(x, y_j))^2 + (f^{(2)}(x, y_{j+1}) - f^{(2)}(x, y_j))^2 + (f^{(3)}(x, y_{j+1}) - f^{(3)}(x, y_j))^2]^{\frac{1}{2}}.$

Jelölje θ' a

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \cdot \widehat{A_0 B_0^{\frac{3}{2}}} \cdot (\widehat{A_0 B} - \widehat{A_0 B_0})$$

értéket.

$\theta^{(1)}$ pontjait bármily sikra vetítve, e vetület egy θ' -nél nem nagyobb területű idomba zárható.

Ugyanis $\theta^{(1)}$ nincs kívül egy oly forgás ellipszoidon, a melynek forgástengelye az $\widehat{A_0 B_0}$ egyenes s a melynek meridiánja egy oly ellipszis, a melynek gyújtópontjai A_0 és B_0 s a melynek nagytengelye az $\widehat{A_0 B_0}$ ívvel egyenlő hosszúságú. Ugyanis $\widehat{A_0 B_0}$ és $\widehat{A_0 B_0}$ nem lehetnek az ellipszoidon kívül. $\widehat{A_0 B_0}$ -ra ez nyilvánvaló és ha $\widehat{A_0 B_0}$ -nak egy Q pontja az ellipszoidon kívül volna

$$\widehat{A_0 Q} + \widehat{Q B_0} > \widehat{A_0 B_0}$$

volna, a mi az ívhossz definitiójánál fogva lehetetlen. Az ellipszoid projectiója pedig nem nagyobb, mint meridiánjának a projectiója s e meridián területe θ' .

θ' -hez hasonlókat jelentsenek θ'' , θ''' , θ'''' , $\widehat{B_0 C_0}$, $\widehat{C_0 D_0}$, $\widehat{D_0 A_0}$ -ra vonatkozólag.

$A^{(h)}$, $B^{(h)}$, $C^{(h)}$, $D^{(h)}$, $B'^{(h)}$ a $z=f^{(h)}(x, y)$ -ra vonatkozólag az A , B , C , D , B' pontokat jelöljék. (II. fejj. 4. 5.).

B'_0 azon pontot jelölje, a melynek ξ , η , ζ coordinátái rendre $B'^{(1)}$, $B'^{(2)}$, $B'^{(3)}$ z coordinátájával egyenlők.

Könnyű belátni, hogy $A_0 B'_0 C_0 D_0$ parallelogramm.

b) Legyen $X_{l_r} Y_{m_r}$ egy oly beosztási sorozat, hogy

$$l_r = m_r, \quad x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = \frac{a}{l_r},$$

($i=0, \dots, l_r-1$, $j=0, \dots, m_r-1$).

Ezen $X_{l_r} Y_{m_r}$ nyilván még olyan is lehet, hogy az $f^{(h)}$ -ra vonatkozólag olyan mint a 3. alatti $X_{l_r} Y_{m_r}$ az f -re vonatkozólag.

Jelölje ε_r az

$$\begin{aligned} s(x_i) &= Y_{m_r} \widehat{A_0 B_0}, & (i=0, \dots, l_r-1), \\ s(y_j) &= X_{l_r} \widehat{A_0 D_0}, & (j=0, \dots, m_r-1), \\ s(x_i) &= Y_{m_r} \widehat{D_0 C_0}, & (i=1, \dots, l_r), \\ s(y_j) &= X_{l_r} \widehat{B_0 C_0}, & (j=1, \dots, m_r). \end{aligned}$$

értékek felső határát. Ez értékek az ívhossz definitiójánál fogva nem negatívak és $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_r = 0$.¹

c) Ezen sorozatra

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} [A_0 B'_0 C_0 D_0] - (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0) = 0.$$

Ugyanis

$$(A_0 B'_0 C_0 D_0) - (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0) = A_0 B'_0 C_0 - A_0 B_0 C_0.$$

Az A_0 , B_0 , B'_0 , C_0 csúcsokkal bíró tetraédert tekintve

$$|A_0 B'_0 C_0 - A_0 B_0 C_0| \leq A_0 B'_0 B_0 + C_0 B'_0 B_0 \leq (\overline{A_0 B_0} + \overline{C_0 B_0}) \cdot \overline{B'_0 B_0}$$

nyeretik.

Ámde $f^{(h)}$ eleget tesz a LIPSCHITZ-féle feltételnek s így

$$\overline{A_0 B_0} \leq \{3^{\frac{1}{2}} \cdot G \cdot a\} \cdot \frac{1}{l_r}, \quad \overline{C_0 B_0} \leq \{3^{\frac{1}{2}} \cdot G \cdot a\} \cdot \frac{1}{l_r}$$

és

$$\overline{B'_0 B_0} \leq B'^{(1)} B^{(1)} + \overline{B'^{(2)} B^{(2)}} + \overline{B'^{(3)} B^{(3)}}$$

és láttuk (2. és 3. pont), hogy

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \frac{1}{l_r} \cdot \overline{B'^{(h)} B^{(h)}} = 0.$$

d) Legyen $a'_{i,j}$ egy az $a_{i,j}$ belsejébe eső és vele párhuzamos oldalokkal bíró paralelogramm. Legyen $\Delta_1, \dots, \Delta_s, \dots$ egy az első fejezet I. halmazába való oly sorozat, hogy $\lim_{s \rightarrow \infty} \Delta_s = T_1$ legyen. $\Delta^{(1)}$ jelentse a Δ_s azon részét, a mely a $\Delta_s^{(3)}$ az $a'_{i,j}$ fölé eső részének felel meg.

¹ Legyenek

$$m'_r(x) = Y_{m_r} [(f^{(1)}(x, y_{j+1}) - f^{(1)}(x, y_j))^2 + (f^{(2)}(x, y_{j+1}) - f^{(2)}(x, y_j))^2 + (f^{(3)}(x, y_{j+1}) - f^{(3)}(x, y_j))^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$l'_r(y) = X_{l_r} [(f^{(1)}(x_{i+1}, y) - f^{(1)}(x_i, y))^2 + (f^{(2)}(x_{i+1}, y) - f^{(2)}(x_i, y))^2 + (f^{(3)}(x_{i+1}, y) - f^{(3)}(x_i, y))^2]^{\frac{1}{2}}$$

$m'_r(x)$ és $l'_r(y)$ folytonosak $s(x) \geq m'_r(x)$, $s(y) \geq l'_r(y)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} m'_r(x) = s(x)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} l'_r(y) = s(y)$. A feltételek szerint $s(x)$ és $s(y)$ folytonosak, így $s(x) - m'_r(x)$ és $s(y) - l'_r(y)$ felső ε'_r határára $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon'_r = 0$ és $\varepsilon_r \leq \varepsilon'_r$.

A következőkben Δ_s -re vonatkozólag több feltételt állítunk fel, e feltételek s elég nagyra vételével mindig kielégíthetők lesznek. A $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}, A_0B'_0B_0, B'_0B_0C_0$ hat felület egyesítéséből származó felület az analysis situs szempontjából egy gömbövvvel æquivalens. Szélei $A_0B'_0C_0D_0$ és $R_{i,j}$ kerülete.

E felületbe nyilván beírható, egy vele az analysis situs szempontjából egyező polyedris $\Delta^{(2)}$ felület, úgy hogy $\Delta^{(2)}$ egyik széle $A_0B'_0C_0D_0$, a másik széle pedig $R_{i,j}$ kerületével majdnem egybeeső.

Sőt e $\Delta^{(2)}$ még nyilván úgy is szerkeszthető, hogy $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}, A_0B'_0B_0, B'_0B'_0C_0$ -nak megfelelően hat oly részre bontható, hogy e részek mindenike a neki megfelelővel majdnem egybeesik.

Van oly $\Delta^{(3)}$ polyedris felület, a mely a $\Delta^{(1)}$ és $\Delta^{(2)}$ felületekkel egyetemben egy oly egyszerűen összefüggő felületet képez, a melynek kerülete $A_0B'_0C_0D_0$.

Legyen ugyanis Δ' a $\Delta_s^{(3)}$ -nak az $\alpha'_{i,j}$ fölé eső része.

$\Delta_s^{(3)}$ egyszerűen összefüggő, tehát egyetlen egy kerületének a mentén egy rajta fekvő vonal vonható, a mely $\Delta_s^{(3)}$ -at két darabra bontja, ezek egyike Δ'' , a mely $\Delta_s^{(3)}$ kerületét tartalmazza a gömbövvvel lesz (a vonal kellő választása által) æquivalens, a másik, a Δ' -et tartalmazó pedig egyszerűen összefüggő lesz.

Jelölje Δ''' a $\Delta_s^{(3)}$ -nak Δ', Δ'' -en kívüli részeit.

$\Delta^{(1)}$ és $\Delta^{(2)}$ az analysis situs szempontjából tehát Δ' , illetve Δ'' -el æquivalensek. Van tehát egy $\Delta^{(3)}$ polyedris felület, a mely Δ''' -el æquivalens, úgy hogy $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}$ egyesítése egy egyszerűen összefüggő polyedris felület, a melynek $A_0B'_0C_0D_0$ képezi a kerületét.

Ha $\alpha'_{i,j}, \alpha_{i,j}$ -vel majdnem egybeeső, $\Delta^{(3)}$ úgy szerkeszthető, hogy pontjai $R_{i,j}$ kerületéhez tetszőleges közel esnek.¹

¹ Azaz $\Delta^{(3)}$ pontjai belül vannak azon idomon, a mely keletkezik, ha $R_{i,j}$ kerületének minden pontjából mint középpontból egy oly gömböt írunk le, a melynek küllője egy tetszőleges kicsi, de pontról-pontra állandó

Vetítsük a $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$, $\mathcal{A}^{(3)}$ egyesítéséből álló felületet $A_0B'_0C_0D_0$ síkjára.

E vetület az $A_0B'_0C_0D_0$ paralelogrammot nyilván befedi.

De e vetületnek $\mathcal{A}^{(1)}$ -ből származó része legfeljebb $\mathcal{A}^{(1)}$ -nek $\mathcal{A}^{(1)}t$ területével egyenlő.

A vetület $\mathcal{A}^{(2)}$ -ből származó részének területe pedig legfeljebb

$$\theta' + \theta'' + \theta''' + \theta'''' + A_0B'_0B_0 + B'_0B_0C_0 + \frac{\partial_r}{2 \cdot l_r^2},$$

itt $\partial_r > 0$ és olyan, hogy $\lim_{r \rightarrow \infty} \partial_r = 0$.

A projectió $\mathcal{A}^{(3)}$ -ból eredő részének területe $< \frac{\partial_r}{2 \cdot l_r^2}$ lehet.

Tehát

$$(A_0B'_0C_0D_0) \leq \mathcal{A}^{(1)}t + \theta' + \theta'' + \theta''' + \theta'''' + A_0B'_0B_0 + B'_0B_0C_0 + \frac{\partial_r}{l_r^2}. \quad (A)$$

Ámde $X_{l_r}Y_{m_r}\mathcal{A}^{(1)}t \leq \mathcal{A}_st$.

$$\theta' = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \cdot \widehat{A_0B_0^{\frac{3}{2}}} \cdot (\widehat{A_0B_0} - \overline{A_0B_0})^{\frac{1}{2}}, \quad \widehat{A_0B_0} \leq \{3^{\frac{1}{2}} \cdot G \cdot a\} \cdot \frac{1}{l_r}.$$

$$Y_{l_r}(\widehat{A_0B_0} - \overline{A_0B_0}) < \varepsilon_r.$$

Így

$$X_{l_r}Y_{m_r}\theta_{i,j} \leq \left\{ \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot G^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \right\} \cdot \varepsilon_r^{\frac{1}{2}}. \quad (1. 2. b)).$$

Az előbbieket szerint még

$$X_{l_\infty}Y_{m_\infty}(A_0B'_0B_0 + B'_0B_0C_0) = 0.$$

Ekként az (A)-ból következtethető, hogy az

$$X_{l_r}Y_{m_r}(A_0B'_0C_0D_0)$$

sorozat határértékei nem nagyobbak, mint $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{A}_st = T_1$.

A c) szerint az

$$X_{l_r}Y_{m_r}(A_0B_0C_0 + A_0D_0C_0)$$

hosszúság. $R_{i,j}$ kerületének hossza véges lévén ezen idomot s így $\mathcal{A}^{(3)}$ -at is bármily síkra vetítve, a vetület egy oly idomba zárható, a melynek területe tetszőleges kicsi.

értékek sorának egy határértéke se lehet tehát kisebb, mint T_1 . Azaz (l. I. fejt.)

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0)$$

létező és értéke T_1 . Vagyis $T_6 = T_1$. És még

$$T_1 = T_6 = X_{l\infty} Y_{m\infty} (A_0 B'_0 C_0 D_0).$$

5. Célunk a 2. pont eredményeit azon esetre is kiterjeszteni, midőn $b \neq a$, $S(x)$ és $S(y)$ nem folytonosak, csak határoltak.

Véges hányadosú beosztási sorozat. Egy X_l beosztás hányadosának egy oly u pozitív állandót nevezünk, a mely nem nagyobb, mint az

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{k+1} - x_k} \quad (i, k=0, \dots, l-1)$$

értékek. Nyilván $u \leq 1$.

Egy X_l sorozatról akkor mondjuk, hogy véges hányadosú, ha van egy pozitív u , úgy hogy a sorozat minden beosztása $\geq u$ hányadossal bír ($u \leq 1$).

Egy $X_l Y_{m_r}$ sorozatról akkor mondjuk, hogy véges hányadosú, ha az X_l és az Y_{m_r} sorozatok véges hányadosúak és ha még az $\frac{l_r}{m_r}$ ($r=1, 2, \dots$) értékek mind oly két véges állandó közt vannak, a melyek egyike se zérus.

Ez esetben

$$m_r = M_r \cdot l_r, \quad x_{i+1} - x_i = \frac{A_r^i}{l_r}, \quad y_{j+1} - y_j = \frac{B_r^j}{l_r},$$

$$a_{i,j} = \frac{P_r^{i,j}}{l_r^2},$$

itt M_r , A_r^i , B_r^j , $P_r^{i,j}$ az r , i , j függvényei, de van két véges pozitív állandó, a melyek egyike se zérus, úgy hogy A_r^i , B_r^j , $P_r^{i,j}$ ez állandók közé esnek. Ezen állandók nyilván az a , b értékeitől, az X_l , Y_{m_r} sorozatok hányadosaitól s az $\frac{l_r}{m_r}$ -et határoló két értéktől függnék.

Tegyük fel, hogy $b \neq a$, $S(x)$ és $S(y)$ határoltak és folytonosak. Legyen

$$\delta_r > 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \delta_r = 0, \quad \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{1}{2}}} < \delta_{r-1}^s.$$

A 2. a) módjára található oly véges hányadosú $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozat, hogy az $X_{l_r} Y_{m_r}$ beosztásra

$$S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r, \quad S(y_j) - l_r(y_j) < \delta_r,$$

$$X_{l_r} Y_{m_r}(w_{i,j} - v_{i,j}) < \delta_{r-1}^s \quad (\delta_0 = 1)$$

állanak.

Ha $\lambda_{i,j} = 0$ vétetik, midőn \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} , \widehat{DA} legalább egyike $\geq \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}$, míg az ellenkező esetben $\lambda_{i,j} = 1$, úgy

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (1 - \lambda_{i,j}) \cdot a_{i,j} = 0, \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} \cdot (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0, \\ X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} \cdot (ABB' + BB'C) = 0.$$

A bizonyítás teljesen a 2. pont módjára történik. Csak az m jellel ellátott viszonyokban lépnek a $\{ \}$ alakú zárjelekbe zárt mennyiségek helyébe más értékek.

Ez értékek, miként az a részletes bizonyításból kitűnik, mind két véges pozitív határ közt vannak, e határok egyike se zérus. E körülmény főoka az, hogy $X_{l_r} Y_{m_r}$ véges hányadosú sorozat. Könnyű volna az $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozat megállapítása után ez értékeket s a két határt meghatározni.

De ez fölösleges, sőt mi több a tárgyalás az m jel segítségével úgy vihető, hogy a viszonyokban (egyenlőségek és egyenlőtlenségek) a $\{ \}$ alakú zárjelek s a bennük foglalt mennyiségek kitöröltetnek.

Az $=$, $>$, $<$ jelek felé írt m jel azt jelenti, hogy a viszony két oldalán levő tagok közül néhányat bizonyos (a fenti határok közé eső) értékkel kell megszorozni, hogy az m jel elhagyásával egy közönséges és helyes viszonyt nyerjünk. Ily értelemben az m jelt még néhányszor használni fogjuk.

Legyen $\eta_r > 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \eta_r = 0$. Válaszszunk ki a fentebbi $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozat r -ik beosztásának $x = x_i$, $y = y_j$ «osztóvonalai» közül

néhányat úgy, hogy azon parallelogrammok területeinek az összege, a melyeknek legalább egy oldala egy ily kiválasztott osztóvonalra esik kisebb legyen $4\eta_r$ -nél.

E parallelogrammokra $\lambda_{i,j} = 0$ vételessék, a többi parallelogrammra pedig $\lambda_{i,j}$ fentebbi értéke maradjon meg. Nyilván

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (1 - \lambda_{i,j}) \cdot a_{i,j} = 0, \quad (\alpha')$$

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0, \quad (\beta')$$

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} (ABB' + BB'C) = 0. \quad (\gamma')$$

Ha a 2. pontnak e pontban (az m jel segítségével) módosított levezetéseit figyelemmel kísérvük, észreveszszük, hogy (α') , (β') , (γ') még akkor is érvényes volna, ha a kiválasztott osztóvonalakra az

$$S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r, \quad S(y_j) - l_r(y_j) < \delta_r$$

egyenlőtlenségek nem is állanának.

A negyedik fejezetben a következő tételt bizonyítjuk be.

A $z = f(x, y)$ olyan legyen, hogy van egy véges és pozitív K , úgy hogy

$$S(x) < K, \quad S(y) < K.$$

Legyen $\delta_r > 0$, $\eta_r > 0$, $\lim \delta_r = \lim \eta_r = 0$ ($r = \infty$).

Lehet oly véges hányadosú $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozatot találni, hogy r -ik beosztására általában

$$S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r, \quad (a)$$

$$S(y_j) - l_r(y_j) < \delta_r \quad (b)$$

áll, úgy hogy azon $x_i [y_j]$ osztópontokra, a melyekre (a) [(b)] nem áll az $\frac{1}{2} K (x_{i+1} - x_{i-1})$, ($x_{-1} = 0$, $x_{l_{r+1}} = a$), $[\frac{1}{2} K (y_{j+1} - y_{j-1})$, ($y_{-1} = 0$, $y_{m_{r+1}} = b$)] értékek összege $< \eta_r$ [$< \eta_r$].¹

A δ_r sorozat nyilván vehető úgy fel, hogy $\frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{1}{2}}} < \delta_{r-1}^s$ s az $X_{l_r} Y$ sorozat még vehető fel, úgy hogy

$$X_{l_r} Y_{m_r} (w_{i,j} - v_{i,j}) < \delta_{r-1}^s. \quad (\delta_0 = 1)$$

¹ Így azon $a_{i,j}$ parallelogrammok területeinek összege, a melyek i és j -je nem tesz eleget (a) (b)-nek $< 4\eta_r$, mert $K > a$, $K > b$.

Ha tehát $\lambda_{i,j}=0$ vétetik, midőn i, j -re (a), (b) nem állanak, vagy ha állanak is, de \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} , \widehat{DA} legalább egyike $\geq \frac{1}{l_r \cdot \delta_{r-1}}$, úgy (α') , (β') , (γ') érvényesek.

Legyen az $S(x) < K$, $S(y) < K$ által jellemzett felület rectifiabilis. $X_{l_r} Y_{m_r}$ véges hányadosú. E két körülményből

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \leq \frac{m}{l_r^2}, \quad ABB' + BB'C \leq \frac{m}{l_r^2}$$

következik.

$$\alpha_{i,j} = \frac{m}{l_r^2}, \quad \text{így az } (\alpha')\text{-ből}$$

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (1 - \lambda_{i,j}) \cdot (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0,$$

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (1 - \lambda_{i,j}) \cdot (ABB' + BB'C) = 0$$

következnek.

Ekként (β') és (γ') segítségével

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0, \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABB' + BB'C) = 0$$

nyeretik.

Tehát a második fejezet 5. pontja alapján az első fejezetben kitűzött három probléma a rectifiabilis $z=f(x, y)$ -ra megoldott.

A következő fejezetben az e pontban jelzett tétel bizonyítását közöljük. Ez az alulról folytonos függvény beható vizsgálatát igényli.

Geöcze Zóárd.

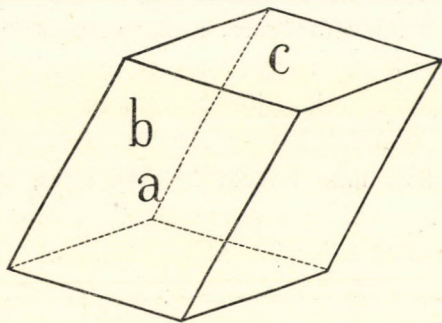
A KETTÖSTÖRÉS UTÁNZÁSA ÜVEGLEMEZEKKEL.

(Második közlemény.)

Első közleményemben egy præparatumot ismertettem, a mely vékony üveglemezekéből összeállítva a fényt úgy vezeti, hogy a fényt bebocsátó nyílásnak két képe jön létre. A közlemény végén a következő kérdésnek megvitatását tűztem ki feladatul: minthogy a kis præparatum az ő egyirányú lamellaritásával a kettőtörő anyag belső szerkezetének egy componensét utánozza, tekinthető-e az általa létesített fényjelenség is a kettőtörő anyagoknál fellépő fényjelenség componensének; más szavakkal: tekinthető-e a præparatum mintegy componentialis kettőtörőnek, bifactor componentialisnak.

A nehézségek a bizonyításnál nem csekélyek, mert egyrészt a kettőtörő anyag lamellaritása igen messzemenő — ultramikroszkopikus — finomságú, a melyhez mérten a præparatum nagyon is durva szerkezet, másrészt a kettőtörő anyagoknál többirányú, például a calcitnál háromirányú lamellaritás van jelen, míg a præparatumnál az üveglemezek csak egyirányú lamellaritást létesítenek. A bizonyítást még nehezebbé teszi az a körülmény, hogy a kettőtörő anyagoknál a lamellaritások egymást kölcsönösen metszik, a mi által hatásuk mintegy más természetűvé válik. Úgy kellett eljárnom, hogy különböző irányokban kísérleteket eszközöltem, s megfigyeltem, hogy ha a præparatum szerkezetét egyik-másik tulajdonság tekintetében közelebb hozzuk a kettőtörő anyag (elsősorban a calcit) szerkezetéhez, mennyiben közeledik maga a fényjelenség is a calcitnál ismeretes fényjelenséghez.

A tárgyalást azon kérdés feltevésével kezdhetjük, mi a különbség a præparatum és a calcit szerkezete között. Ezt általánosságban az imént már megemlítettük, most részletezzük kissé. Mint főkülönbséget talán hármat jelelhetünk meg. Az első az, hogy a calcitnál a lamellák és a lamellák közti intervallumok, közök, ultramikroszkopikus vékonyságúak, a második, hogy a calcitnál három lamellaritás van jelen, mert vegyük például, hogy a præparatummal az *a* lappal (lásd az 1. rajzot) párhuzamos lamellaritást akarjuk utánozni, akkor még hátramarad egy második, a *b* lappal párhuzamos és egy harmadik, a *c* lappal párhuzamos lamellaritás. A



1. ábra.

harmadik főkülönbséget abban jelelhetjük meg, hogy e lamellaritások egymást kölcsönösen metszik, hatásuk tehát a fényjelenség létesítésénél nem egymásutáni, hanem simultan.

E főkülönbségeken kívül igen fontos különbségnek kell még tekintenünk azt is, hogy a calcitnak anyagi minősége más mint a præparatumé, s ezzel kapcsolatban az ásványanyagnak és a közökben, intervallumokban felmerülő anyagnak törési viszonyai is mások, mint a præparatumnál. Nem csekély fontosságú még, a miről a præparatumnál tulajdonképen nem is szólhatunk, hogy az egyes lamellaritások a calcitnál mily szögek alatt metszik egymást s milyen az egyes lamellaritások dülése a vízszinteshez.

Szándékom a három főkülönbséggel külön külön foglalkozni, a többit közben kell helyenként szóba hoznunk.

A) Az első főkülönbséget illetőleg fontos megfigyelnünk azt, mily változást szenved a fényjelenség, ha a præparatum lemezkéinek vastagságát változtatjuk. Kísérleti eljárásom erre az volt, hogy háromféle vastagságú és pedig 0.5 mm, 0.15 mm

és 0.05 mm vastag lemezkékből állítottam össze egy-egy præparatumot, jobban mondva három kis hajlítható rézkeretet alkalmaztam, olyant, a milyenről már az első közleményemben szoltam, a melynek segítségével a lemezkéknek tetszésszerinti dűlést adhattam. Kiindulásul az 57° -nyi dűlést vettem. A fényjelenséget a három præparatumnál összehasonlítólág vizsgál-tam s különös tekintettel voltam a fényjelenség egyes részei-nek fényerősségére, azok polárossági és elhelyezkedési viszonyaira és az egyes részek helyzetére. Lássuk a fényjelenség egyes részeit, a jobbképet, a balképet, a csóvafényt külön-külön.

a) A jobbkép viselkedése a lamellák vékonyodása esetében. E kép, mint láttuk, úgy jön létre, hogy a fény egy része alul a lemezkékbe hatolva, benn az üveganyagban halad a lemezke felső széleig. E miatt általában azt kell mondanunk, hogy vastagabb lemezkéknél több fény haladhat az egyes lemezkék anyagában, mint a vékonyabbaknál, mert ez utóbbiaknál a lemezkék közé sok köz, intervallum esik. A jobbkép tehát a vastag lemezkéknél fényesebb lesz, mint a vékony lemezkéknél. A kísérleti összehasonlítás tényleg ennek felel meg s általában az mutatkozik, hogy a lemezkék vékonyodása egyik feltétele annak, hogy a fény ne túlnyomólág magukba a lemezkékbe hatoljon be, hanem jobban megoszoljon a jobbkép és a fényjelenség többi részei között. Azt is találjuk, hogy a fény-bebocsátó köralakú nyílásnak képe a vékony lemezkéknél tökéletesebb körré kerekedik ki, úgy hogy igen vékony lemezkék-nél egyöntetű kerek képet kapnánk.

A jobbkép fénye mind a három præparatumnál teljes fény, vagyis polárosságot nem mutat. Mint ilyen, e kép a calcitnál nem is merül fel, de tárgyalása a jelenség értelmezésére nem csekély fontosságú, azért a későbbiekben többször kell rá visszatérnünk.

b) A balkép viselkedése a lamellák vékonyodása esetében. E kép úgy jön létre, hogy a fénynek egy része e lemezkék közti közökbe hatol, a melynek főrésze azután a lemezkéken, azok sorozatán folytatólágosan balfelé töretve a felső felületen

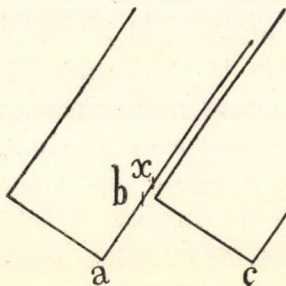
a lemezkék közti közökből kijön. A fény ezen útjában sok lemezkén kénytelen keresztül hatolni s épen azért azt lehet várni, hogy az igen vékony lemezkéknél, a midőn jelentékenyen több lemezkén megy keresztül, a balkép fényerőssége is jelentékenyen csökken. Ez tényleg be is következik, ha a lemezkék nem eléggé tiszták, de tisztább lemezeket alkalmazva, a kép hatványozott mértékben erősödik, úgy hogy gondosan tisztított lemezekből készült præparatum határozott körvonaltól elég fényes képet ad.

A jelenség kellő értelmezése tárgyunkat illetőleg hasznosnak mutatkozik, azért czélszerű, hogy vele kissé foglalkozunk. Különösen három dologra kell figyelemmel lennünk.

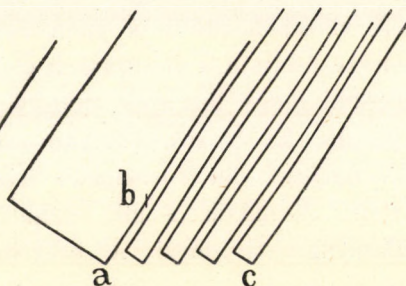
A lemezkék tisztítása nem csekély nehézséggel jár, mert a lemezke felülete a tisztításkor elektromos is lesz, s nem lehet elkerülni, hogy bizonyos mennyiségű piszok a lemezkéhez ne tapadjon. Ez a sok lemezke esetében még akkor is számottevő tényező, ha a lemezkék tisztítása a legnagyobb gonddal történt. A másik, a mit számításba kell vennünk, a balkép polárossági viszonyai. A balkép fénye, mint láttuk, poláros fény, a mely úgy keletkezik, hogy a mint a fény az egyes lemezkéken megtöretik, *a lemezkék síkjával parallel rezgések* egy része (egy kis rész a merőleges rezgésekből is) jobbfelé reflectáltatik s alkotja a csóvafényt, a többi hátrammaradó s főképen *merőleges rezgésű* rész pedig alkotja a balképet. Ha már most vastag lemezeket alkalmazunk, a parallel rezgéseknek említett jobbfelé reflectálódása nem megy végbe valami tökéletesen, s maradnak parallel rezgések a balkép területén is, főképen annak jobb részében, s ez növeli a vastag lemezkéknél a balkép fényerősségét. Ha ellenben vékony lemezeket alkalmazunk, a sok lemezke a parallel rezgésű sugarakat sokkal nagyobb mennyiségben reflectálja jobbfelé, úgy hogy a balkép környéke meglehetősen tiszta poláros fényt mutat merőleges rezgésekkel, de ennyiben természetesen fényerőssége is gyengül. A harmadik az, hogy a lemezkék felületének egyenetlenségei is sok fénysugarat más irányba terelnek, s ez a

vékony lemezkéknél, mert sok a lemezke, nagyobb fokban következik be.

Hogy mindezek daczára a balkép a legvékonyabb lemezkék-nél is mint elegendő fényes kép jelenik meg, arra nézve a fény belépésénél találunk olyan körülményt, a mely épen a lemezkék vékonyodásával válik mindinkább kedvezővé. A præparatum alsó lapján a lemezkék úgy illeszkednek egymáshoz, hogy két-két szomszédos lemezke egy beszögellést alkot, mint azt az átmetszetben a 2. rajz mutatja. A fénynek az a része, a mely a lemezkéknek alsó élét, a bc oldalt éri, jelentékeny részével, behatol a lemezkébe, az a fény pedig, a mely a szomszédos



2. ábra.



3. ábra.

lemezke jobb oldalának ab szegélyét éri, a csekély reflectált fénytől eltekintve, a lemezkétől megtöretik s balra megy; az ab -hez hozzáveendő még azon terület is, a mely a két lemez között levő köz, intervallum miatt a b -nél előfordul, t. i. a bx . Ha most a vastag lemez helyébe például négy vékonyat teszünk (lásd a 3. rajzot), akkor a bc oldal helyébe négy kisebb lép, a melyek együttvéve nem lesznek egyenlő hosszúak a bc -vel, mert a lemezkék közti intervallumok szaggatják meg a bc hosszúságot. Ellenben az ab helyett fellépő négy kisebb oldal mindegyike növekszik egy bx részszel és így azok összege nagyobb lesz, mint az eredeti ax távolság volt.

A fénytörő felületnek ezen nagyobbodása fontos arra, hogy a nem poláros jobbkép fényének egy részét átterelje a balkép-

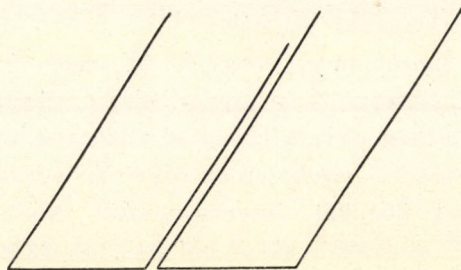
hez (s általában, mint látni fogjuk, a csóvafényhez is) és így lehetségessé lesz, hogy a balkép mint elegendő fényes kép alakulhasson meg, a miről meggyőződhetünk, ha az *ab* távolságot a lemezeknek kisebb-nagyobb döntésével vagy más egyéb eljárással változtatjuk. Erről a későbbiekben még szólni fogunk.

Ezeket tekintetbe véve azt kell mondanunk, hogy a præparatumnál a lamellák vékonyodása nem állít semmi akadályt sem arra nézve, hogy a balkép megalakulhasson, ellenkezőleg azt találjuk, hogy a kép polárossága a lamellák vékonyodásával tökéletesedik, fényerősségét pedig csak annyiban találjuk gyengülni, a mennyiben azt a mesterséges szerkezettel kapcsolatos tökéletlenségek okozzák.

A præparatumnál most elmondottak azért fontosak, mert ha folytatólag átmegyünk a calcit belső szerkezetére, s ha a calcitot, mint a hogy arra a hasadási viszonyok utalnak, finom lamellákból összeálló szerkezetnek vesszük, a melynél az egyes lamellák között közöket, intervallumokat találunk bizonyos intervallumbeli anyaggal, akkor azt kell mondanunk, hogy az ily szerkezet általában véve lehetséges szerkezet arra, hogy megfelelő erősségű poláros képet hozzon létre. Hogy a poláros kép a calcit összetettebb szerkezete mellett tényleg miképen jön létre, s hogy ezzel kapcsolatban a præparatum balképe jellege szerint a calcit melyik képének felel meg, erre nézve a későbbiekben fogunk néhány megjegyzést tenni.

Vissza kell még térnünk a fény belépését tárgyaló előbbi megfontolásainkra is, mert erre nézve a calcitnál eltérést találunk a præparatumnál. Ugyanis a calcitnál alul nem képződnek a 2. rajzban feltüntetett *abc* beszögellések, mert az alapot kis rhomboéderek basislapjai képezik, a miért is a 2. rajzot úgy kell átalakítanunk, a mint azt a 4. rajz mutatja. A vízszintes basislapoknak ezen fellépése nem külön jellegű eltérés a præparatum és a calcit között, hanem velejár a vízszintes lamellaritás metszésével (lásd a 13. rajzot), azért ezzel kapcsolatban kell majd azt tárgyalnunk.

Néhány szót szólhatunk még a præparatum képeinek átlátszóságáról. A jobbkép zavaros kép nagyon csekély átlátszósággal, mert a lemezkék szabálytalan élei csak diffus fényt adnak. A balkép mutat átlátszóságot, a mely nagyobb fokú a vastag lemezkéknél, mert ott terjedelmesebbek a közök, de a vékony lemezkéknél az átlátszóságot jelentékenyen rontja a nagyszámú érdes lemezke-él s hozzájárulnak azon tényezők, a melyek a fényerősséget is gyengítik. A calcitnál, a kis rhomboëdereknél igen tökéletes simaságú oldallapocskákat vehetünk fel, a melyek az intervallumbeli anyag közbejöttével egymáshoz illeszkedve és szabályos sorozatokat alkotva létrehozzák



4. ábra.

azon körülményeket, a melyek mellett a tökéletesebb átlátszóság lehetővé válik.

c) A csóvafény viselkedése a lamellák vékonyodása esetében. E fény, mint láttuk, úgy jön létre, hogy a balkép alkotására balfelé haladó fény az egyes lemezkék mind a két felületénél nemcsak törést szenved, hanem reflexiót is, a mi által a parallel rezgések egy része jobbfelé verődik, de ez történik a merőleges rezgések kisebb-nagyobb részével is, a mi, mint ismeretes, a lemezkék dőlésszögétől függ. Az 57 körüli fokoknál, a mely fokot itt is kiindulásul vehetjük, igen kevés a csóvafényben a merőleges rezgések száma.

A csóvafény nem oly feltűnő része a præparatum fényjelenségének, mint az imént ismertetett jobb és balkép, de azért

behatóan kell vele foglalkoznunk, mert azokkal egyenlő rangú jelenség. Így az 57 körüli fokoknál azt találjuk, hogy a fénynek azon része, a mely az *ab* oldálnak (lásd a 2. rajzot) ütközik, körülbelül felerészben, t. i. a merőleges rezgésű rész, a balképet alkotja, felerészben pedig, t. i. a parallel rezgésű rész, mint csóva terjed szét. A lemezkék erősebb dülésénél — az 57-nél kisebb fokoknál — a csóvában mind több és több párhuzamos és merőleges rezgés is fellép s a balkép fényerőssége is növekszik. Ez a jobbkép rovására vagyis a miatt történik, mert a balkép és a csóva mindinkább átveszik a jobbkép fényét; ugyanis a mint a lemezkék dülésével az *ab* oldálnak (lásd a 2. rajzot) a vízszintesre való vetülete mind jobban növekszik, ugyanoly arányban a *bc* oldálnak vetülete fogy és így mind kevesebb fény jut be a lemezkékbe, úgy hogy a 20-on aluli fokoknál a jobbkép már csak egy-két vékony fényes vonalka alakjában jelenik meg. A lemezkék dülésével egyúttal a csóva mindinkább rövidül, mert különösen a merőleges rezgésű sugarak könnyebben mennek át a lemezkéken s a csóva a balképbe, a mely mindinkább a cenztrális ponthoz közeledik, huzódik vissza. Az 57-nél magasabb fokoknál a csóvafényben megint csak növekszik, legalább aránylagosan, a merőleges rezgések száma. Ez most a balkép fénynek rovására történik, mert a magasabb fokoknál nemcsak a parallel, hanem a merőleges rezgések is mindinkább jobbfelé reflectáltatnak, úgy hogy a balkép lassan eltűnik és pedig a legvékonyabb lemezkéknél már 66° táján, a legvastagabb lemezkéknél 70° táján. Ha a lemezkéket még jobban vékonyíthatók, a balkép eltűnése, illetőleg a merőleges rezgésű sugaraknak jobbfelé való elreflectálódása még előbb következne be. A fénysugaraknak ezen jobboldalra való reflectálódásával nem növekszik aránylagosan az ideeső csóvarésznek fényerőssége; a lemezkék emelkedésével ugyanis azok alsó éle úgy fordul, hogy most a *bc* oldal (lásd a 2. rajzot) vetülete növekszik az *ab*-hez mérten, s a fény mindinkább magukba a lemezkékbe hatol, úgy hogy a csóva fénye fokozatosan gyengül s lassan-

kint egészen a jobbképbe huzódik, a mely mindinkább cenztrális helyzetet kap.

A csóvafénynek most leírt változásánál fontossá válik a két-fajta rezgésű sugaraknak külön-külön való tárgyalása, mert ha ezt összefüggésbe hozzuk a két képnek, a jobb és a balképnek változásával, lehetővé válik mind a parallel rezgésű, mind pedig a merőleges rezgésű sugaraknak a lamelláris szerkezetben való viselkedését egészen jellemeznünk.

Szóljunk előbb a csóvának parallel rezgésű részéről.

A csóva a parallel rezgésű sugarakat legtisztábban az 57 körüli fokoknál tartalmazza. Az ekkor mutatkozó fényjelenség meglehetősen eltérést mutat az alkalmazott lemezkék vastagsága szerint. A vastag lemezkéknél a párhuzamos rezgésű sugarak messze balra kezdődnek, t. i. már magának a balképnek a területén, a honnan elég fényes s úgyszólván változatlan szalag formájában huzódnak a jobbképig; a jobbképen túl a szalag fénye már gyengül, de csak lassan, úgy hogy jobbfelé messze elterjed. A közepes vastagságú lemezkéknél a parallel rezgések már gyengébben lépnek fel a balkép tájékán s a jobbképtől jobbra sem terjeszkednek oly messze, mint az előbb. A legvékonyabb lemezkéknél a párhuzamos rezgésű csóvarész meglehetősen elvonul a balkép tájékáról s a jobbképen túl is kevésbé terjeszkedik, mint az előbbi két esetben, hanem legtöbb sugarával a cenztrális pont és a jobbkép környékén terjed el. Ezekből tehát azt látjuk, hogy mentől vékonyabbak a lemezkék, a párhuzamos rezgésű sugarak annál inkább a cenztrális pont tájékán csoportosulnak, s annál kevésbé terjeszkednek jobbra vagy balra. Minthogy azonban a legvékonyabb lemezkék is aránylag elég durvák, azért a sugarak az ily lemezekből összeállított præparatumnál is még szétterjeszkednek, s mivel továbbá a fénysugarak nagy része a lemezekbe hatol s a fény nem elegendő, e miatt az 57-ik foknál a párhuzamos rezgésű sugarak a fényt beocsátó nyílásnak körkörös képét nem tudják létrehozni. Erre nézve kedvezőbbek a körülmények az 57-nél kisebb fokoknál.

Említettük ugyanis, hogy a lemezkék erősebb dülésénél (az 57-nél kisebb fokoknál) a csóva mindjobban a balkép tájékára húzódik, mert a lemezkéken egyre több sugár tud áthatolni s a jobbkép fénye is fokozatosan a baloldalra terelődik át. E miatt a parallel rezgésű sugarakból annyi jön össze a balkép közelében, hogy a jelenséget nikollal vizsgálva, már a 40-ik fok körül a fényt bebocsátó nyílás kerek alakjának bal széle kezd kialakulni, jóllehet jobbfelé a csóva még elég messze elhúzódik. Ez a parallel rezgést mutató kép azonban nem esik egészen össze a balképpel, hanem tőle kissé jobbra, a cenztrális pont felé, s e miatt a nikol forgatásakor úgy tetszik, mintha a balkép egy kissé ide-oda mozogna. A 35-ik fok körül a kép a jobb szélén is vagyis köröskörül kezd kialakulni. Így van ez a közepes vastagságú (0.15 mm) lemezkéknél. A vékony (0.05 mm) lemezkéknél a 40-ik fok körül a parallel rezgésű csóva még csak a cenztrális pont táján foglal helyet, a honnan gyöngébb fénynyel elterjed jobbfelé, de a balkép felé kevés jut el belőle; jobban kell tehát döntenünk a lemezkéket s körülbelül a 36° — 37° -nál itt is kezd kikerekedni a kép bal széle, s ez a parallel rezgésű kép is mutatja a nikol forgatásakor az előbb említett ide-oda mozgást. A 33-ik fokon alul a vékony lemezkéknél is teljessé kerekedik a kép, de egyuttal mindjobban összeesik magával a centrum felé közeledő balképpel. A vastag lemezkéknél (0.5 mm) már a 40-nél nagyobb fokoknál bekövetkezik a parallel rezgésű kép kikerekedése, de e kép jobban összeesik a balképpel, mint az előbbi két esetben, mert messzebb esik a cenztrális ponttól balfelé.

Azt látjuk ezekből, hogy mentől vastagabbak a lemezkék, annál magasabb állásnál (nagyobb fokoknál) tud a parallel rezgésű kép kialakulni. Ennek okát abban találjuk, hogy a vastag lemezkék több parallel rezgésű sugarat bocsátanak át.

Megkísérlettem tehát, nem lehetne-e a jobbkép fényének nagyobbfokú balra terelésével a körülményeket még kedvezőbbekké tenni. E végből úgy jártam el, hogy a vastag lemezkéknek köszörülés útján élesebb szélt adtam, a mi által az *ab*

oldal vetülete (lásd a 2. rajzot) nagyobb lett, s a jobbkép fénye részben átment a baloldalra. Így történt, hogy a képnek kikerekedését már előbb észlelhettem, hogy már az 53-ik foknál mutatkozott a bal szélen némi körvonal, s az 51-ik foknál a jobb szélen is határozottá lett a kép köralakú contourja. Megjegyezzük azonban, hogy mivel az alkalmazott lemezek vastagok voltak (0.5 mm), a kép csaknem összeesett magával a balképpel.

Az 57-nél nagyobb fokoknál a párhuzamos rezgésű sugarak mind a három fajta præparatumnál mindjobban elvonulnak a balkép tájékáról s a legfényesebb rész a centrális pont körül foglal helyet. Ez a körülmény magában nem volna alkalmatlan arra, hogy a centrális pont közelében egy parallel rezgésű kép alakuljon ki, de ez a kép, mint már az 57-ik foknál is találtuk, nem ad köralakot, hanem szétterjeszkedik jobbfelé is, balfelé is, különösen a vastagabb lemezekéknél. Ehhez járul, hogy a csóvafény főrésze a lemezekébe hatol s a jobbképbe olvad, a csóva maga pedig oly sötét, hogy a kép kikerekedéséről szó sem lehet. Kedvezőbbekké válnának itt is a körülmények, ha valami eljárással a jobbkép fényét balra a centrális pont felé terelhetnők. E végből a nagyobb fokoknál is alkalmaztam az előbb említett élesebb szélű lemezekéket s azoknak, hogy a calcitnál felmerülő dülést utánozzam, 71° -nyi dülést adtam. E præparatumnál a csóva jelentékenyen fényesebb lett, különösen a centrális pont tájékán és a balkép felé, köralakot azonban nem ad, hanem a kép balra is jobbra is szétnyúlik, különösen mert a csiszolás miatt épen itt kellett alkalmaznom a legvastagabb lemezekéket. A képnek photographiáját az 5. kép mutatja. A felvétel 4 dm távolságból nikolon át történt.¹ A kép felett és alatt észlelhető pontok összekötő vonala a fénybeocsátó nyílás közepén megy át. A præparatumot magát különben nem lehet valami nagyon tökéletes alakban előállítani, úgy hogy

¹ A felvételt PALATIN GERGELY pannonhalmi főiskolai tanár úr volt szíves eszközölni.

nem sikerül a jobbkép összes párhuzamos rezgésű sugarát a centrum felé terelni, a mi miatt a lemezkék éleit be kellett feketíteni, hogy a jobbkép fénye a jelenséget ne zavarja.

A csóvafény parallel rezgésű részének ezen viselkedését egészen elemi physikai törvények alapján értelmezhetjük. A parallel rezgésekről ismeretes, hogy egy törőlaphoz ferde szög alatt ütközve, kevésbbé tudnak behatolni a törőlap anyagába, mint a merőleges rezgések, vagyis több reflectálódik el belőlük s viszont, a lemezkékbe jutott parallel rezgések többet reflectálódnak a lemezke anyagában s kevésbbé tudnak abból kihatolni. A parallel rezgésű fénysugaraknak tehát igen fontos jellemző vonása, hogy a lemezes szerkezetben sokat reflectálódnak ide-oda az intervallumokban és a lemezkék törőanyagában, s kevésbbé tudnak eljutni jobbra vagy balra mint a merőleges rezgésűek, s emiatt inkább a centrális pont tájékán helyezkednek el.



5. ábra.

A parallel rezgésű fény e jellegével összefüggést mutat a kettőtörő anyagok ú. n. ordinarius képével, a mely mindig a fényt-bebocsátó nyílás felett a centrális pontban alakul meg. Ezen összefüggésre annál is inkább következtethetünk, mert láttuk, hogy a parallel rezgésű sugarak a lemezes szerkezetben annál inkább a centrális pontban helyezkedhetnek el, mentől vékonyabb lemezkéket alkalmazunk. Csak egy igen fontos feltételre van szükség, t. i. oly berendezésre, mely a fényt a jobbképtől elvezeti, vagyis nem engedi, hogy a fény a lemezkékbe hatolva, azokban mintegy megkötve haladjon. A vastag lemezkék szélének kiélesítésével tett föntebbi próbálkozásunk ezt a berendezést akarja némileg pótolni. A kettőtörő kristályanyagoknál a követelt berendezés más alakban, de tényleg megvan s részben már ez értekezés keretében szólhatunk róla, de csak később, midőn a calcit többirányú lamellaritását ismertettük. Most csak a parallel rezgésű fény-

sugárnak a lemezes szerkezetben való viselkedését akartuk általánosságban jellemezni.

Lássuk most, mikép viselkedik a csóvafénynek merőleges rezgésű része. Ha a tárgyalást megint az 57° körüli fokokkal kezdjük, meg kell ismételniünk, hogy a csóvafény ekkor tartalmaz legkevesebb merőleges rezgést; a mi kevés mégis a nikollal észlelhető, az messze terjed el jobbfelé. Ha a lemezeket jobban döntjük (vagyis az 57° -nél kisebb fokoknál), növekszik a csóvában a merőleges rezgésű sugarak mennyisége s azok elreflektálódása olyan irányú, hogy a sugaraknak tulajdonképpen még messzebb kellene jobbfelé terjeszkedni, mint az 57° -nál, csak hogy ekkor mindig több és több merőleges rezgésű sugár tud törés útján magukon az üveglemezekén balfelé áthaladni s e miatt a csóva a lemezek dűlésével rövidül és pedig hirtelenebbül, mint a párhuzamos rezgésű csóvarész s mindjobban beleolvad a centrális ponthoz közeledő balképbe. Megemlítendő egyuttal, hogy e rövidülő csóva meglehetősen fényes, a mit u. az a körülmény okoz, a melyet a parallel rezgésű csóvánál is említettünk, hogy t. i. az *ab* oldal (lásd a 2. rajzot) növekedésével a jobbkép fénye átterelődik a balkép tájékára. Az 57° -nél nagyobb fokoknál is növekszik a merőleges rezgésű sugarak mennyisége a csóvafényben s ez most nem a jobbkép, hanem a balkép rovására történik, mert a lemezek magasabb állásánál azok felületei a merőleges rezgéseket nagyobb mennyiségben jobbfelé reflektálják, s ez a csóva messzebb terjeszkedik jobbfelé, mint a parallel rezgésű csóva. Különösen a vékony lemezeknél tapasztaljuk, hogy a merőleges rezgések a balkép környékén kívül a csóva jobb végén válnak mindjobban uralkodókká, a mi közben a balkép annyira gyengül, hogy elveszti köralakú contourját és pedig a legvékonyabb lemezeknél a 66° táján. Ha a lemezeknek még magasabb állást adunk, a merőleges rezgések még inkább jobbfelé vonulnak, úgy, hogy a legvékonyabb lemezeknél a merőleges rezgésű csóvának legfényesebb része, maximuma a 70° -nál elvonult már a balkép tájékától, s a centrális ponton kb. a 73 — 74 . fokoknál

vonul át. A 80-ik fok körül már a centrális ponttól jobbra esik, kb. a jobbkép tájékára, s ekkor már a jobbképtől jobbra úgyszólván csak a merőleges rezgésű csóva vehető észre. A vastag (0.5 mm) lemezkéknél a merőleges rezgéseknek jobbra átvonulása nem történik oly gyorsan, mert a 70 körüli fokoknál a balkép még látszik, s ekkor kezd a merőleges rezgés a csóva jobb végén uralkodóan fellépni. A 80-ik foknál a maximum a balkép és a jobbkép között foglal helyet, s csak a még nagyobb fokoknál történik annak átvonulása a centrális ponton.

E fokozat azt mutatja, hogy mentől vékonyabbak a lemezek, annál kisebb dőlésfokoknál terelődnek át a merőleges rezgésű sugarak a jobb oldalra. Egyébiránt a merőleges rezgésű csóvára is fennáll, hogy a vékony lemezkéknél általában nem terjeszkedik szét annyira, mint mikor vastagabb lemezeket alkalmazunk, továbbá, hogy a nagyobb fokoknál a csóva ezen része is feltűnően gyengül, mert a fénysugarak főmennyisége a lemezekbe hatol, s a csóva mintegy a jobbképbe húzódik.

Mint látjuk, a csóvafény merőleges rezgésű részét (bele kell vennünk itt magát a balképet is) főképen az jellemzi, hogy kevesebbet verődik a lemezekben és az intervallumokban (szóval az üvegfelületeken) ide-oda, hanem törés útján jobban átmegy a lemezekén és pedig történik ez oly beosztással, hogy a lemezek nagyobb dőlésénél (a kisebb fokoknál) balfelé megy át e rezgések főmennyisége s alkotja a balképet, a nagyobb fokoknál ellenben a centrális ponttól jobbra találjuk a fénysugarak főmennyiségét és pedig annál előbb (annál kisebb fokoknál), mentől vékonyabbak az üveglemezek.

A merőleges rezgésű fény ezen viselkedésével összefüggést mutat a kettőtörésű kristályok ú. n. extraordinarius képének fényével, a mely kép nem a centrális pontban alakul meg, hanem attól vagy jobbra vagy balra; az előbbi történik az optikailag negatív, az utóbbi az optikailag pozitív kristályoknál. A calcitnál s a vele közel egyező belső szerkezetű ásványoknál, a melyeknél a lemezek dőlése 70° -nál magasabb, az extra-

ordinarius kép mint a centrális ponttól jobbra eső kép jelenik meg.

Midőn ezekkel érintjük az összefüggést a merőleges rezgésű fénynek és a calcit extraordinarius képének jellege között, azon fontos megjegyzést is kell tennünk, hogy a calcit extraordinarius képének megalakulásánál több lényeges feltételnek kell fennforogni, hogy a merőleges rezgésű kép a centrális ponttól jobbra kikerekedhessen, mert a præparatumnál csak a baloldalon tud kikerekedni mint balkép, de a jobboldalon nem, mert a præparatum lemezes szerkezete, mint az előzőkben már említettük, a sugarakat akkor, midőn jobbfelé reflectálja, egyúttal jobban szét is szórja, másrésről a fénysugarak jórésze a lemezkék üveganyagába hatol, a hol aztán nem esik a lemezes szerkezet polarizáló hatása alá. Ily lényeges feltételt egyet már megjelöltünk, t. i. a lemezkék vékonyságát, mert ez magával hozza, hogy a merőleges rezgések könnyebben jobbra terelődnek, másrészt meg nem terjeszkednek szét túlságosan. Fontos hatást kell még erre nézve a calcit több irányú lamellaritásának tulajdonítanunk s annak tárgyalásánál nyílik majd alkalmunk, hogy e tárgyra rövid megjegyzést tegyünk. Célom jelenleg csak az, hogy a merőleges rezgésű fénysugárnak a lamelláris szerkezetben való viselkedését általában jellemezzem.

B) Térjünk most át *a második főkülönbség* tárgyalására, a mely abban áll, hogy a calcitnál az eredetileg felvett és a præparatumnál durván utánzott *a* lamellaritáson kívül egy második lamellaritás is van, a mely a *b* lappal párhuzamos és az *a* lamellaritással $101^{\circ}53'$ -nyi szöget képez, a vízszinteshez pedig a dőlés szöge ugyanaz, mint az *a* lamellaritásé. Ezekhez hozzájárul egy harmadik, t. i. a *c* lappal párhuzamos lamellaritás, a mely a calcit rhomboëder azon állásánál, a melyet az 1. rajz mutat, a vízszintes síkba esik. E lamellaritások hatásának tanulmányozása végett megközelítő kísérleti eljárást akként alkalmaztam, hogy az eredeti præparatum fölé egy másikat helyeztem és rajta körülforgattam. A præparatumok kissé keskenyebb lemezekéből (6 és 8 mm) voltak összeállítva,

mert az eredeti 10 mm széles lemezekből készült præparatumok igen sötét képet adtak. A lemezek dülése kb. 57° volt.

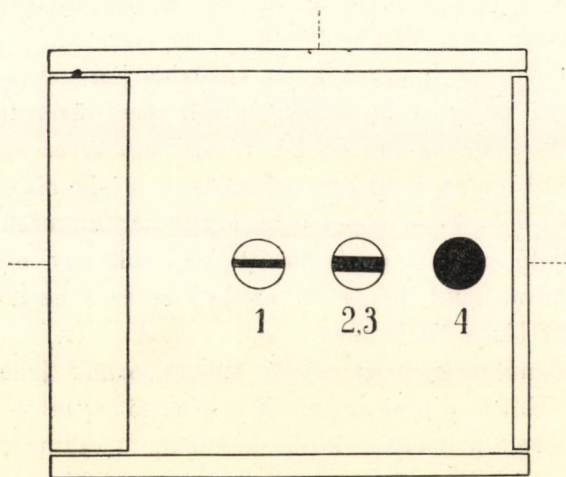
Az új fényjelenség egyszerűen az által jön létre, hogy az alsó præparatumnak két képét és a csóvát a felső præparatum újból két részre osztja, úgy hogy általában négy képet láthatunk, s azok között a csóvafényt. Jeleljük az eredeti balképből balratörítés által létrejövő képet 1-el, a jobbfelé vezetés által létrejöttet 2-vel; az eredeti jobbképből balratörés által létrejött képet 3-al, a jobbfelé vezetés által létrejöttet pedig 4-el. A képek ezen megalakulása hozza magával, hogy az 1. és a 3. kép fénye a lemezek közti közökből jön elő, a 2. és a 4. kép fénye pedig a lemezek éléből, azok üveganyagából. A csóvafény is analog módon két részre oszlik, az egyik rész balfelé törelik és az 1. és 3. kép között, a másik rész jobbfelé vezetődik és a 2. és 4. kép között foglal helyet; ezenkívül az 1. és 2., illetőleg a 3. és 4. között képződik egy olyan természetű csóva, mint maga az eredeti csóva s ez a 2. és 4. képeken egy kissé túl is megy.

A fényjelenségnek és az előálló változásoknak jellemzésére legcélszerűbb lesz a præparatumok nyolcz főhelyzetét (0° , 45° , 90° stb) leírni, a melyek közül azonban tulajdonképen csak az első öttel kell foglalkoznunk, mert a többi már ezekkel jellemezve van.

Az 1-ső helyzetben a két præparatum lemezkéi egymással 0° -ú szöget képeznek s dülésük egyenlő irányú (lásd a 6. rajzot). A négy kép ez esetben egy vonalban van s közülök a 2. és 3. összeesik. Az 1., 2. és a 3. kép poláros és pedig a rezgések a lemezekre merőlegesek, a 4. kép nem poláros. A jelenség könnyen értelmezhető, mert az 1. és 3. kép mint balratörés útján keletkezett képek természetesen merőleges rezgést mutatnak, a 2. kép pedig, mivel az 1-ből az által keletkezett, hogy a lemezek üveganyaga az eredeti balképnek rezgéseit vezeti egyszerűen jobbfelé, szintén merőleges rezgést mutat. A képek között elég jól feltűnő csóvafény is látható, a mely az 1. és (2., 3) képek között inkább merőleges rez-

gésű, a (2., 3.) kép tájékán s azon túl a 4. kép felé párhuzamos rezgésű.

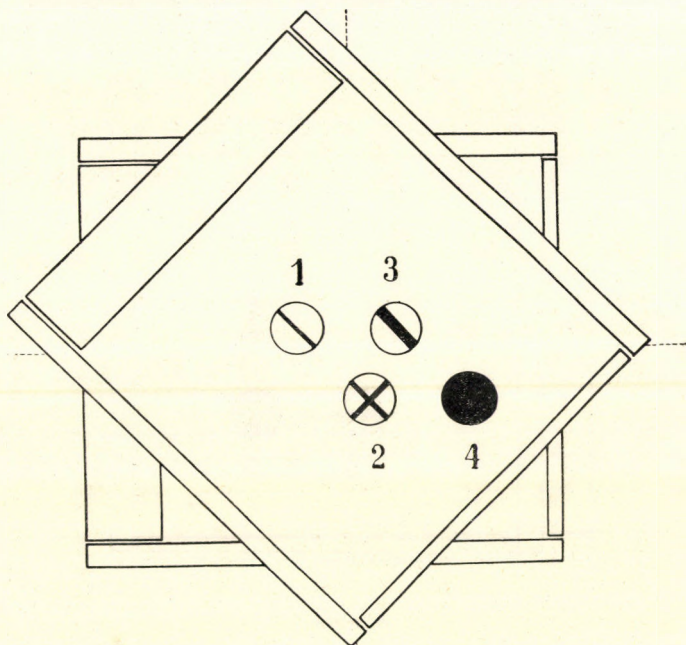
A 2-ik helyzetben a lemezek egymással 45° -ú, illetőleg 135° -ú szöget képeznek s dőlésük egyező irányú. A négy kép különvált s elhelyezkedésüket a 7. rajz mutatja. Az 1. és 3. kép, mint balratört képek, polárosak s a rezgések merőlegesek a felső præparatum lemezkéire. A 4. kép nem poláros. A 3. és 4. kép fényerőssége körülbelül ugyanaz, mint az első helyzet-



6. ábra.

nél volt, mert mind a két kép a nem poláros jobbképből származik, az 1. kép fényerőssége azonban gyöngült. Érdekes a 2. kép viselkedése. Ez az első helyzetben poláros volt merőleges rezgéssel; a merőleges componens azonban a præparatum elfordításával gyengül, de ugyanoly mértékben erősödik a párhuzamos componens, úgy hogy 45° -nál a két componens egyenlő erős, vagyis a második kép e helyzetben nem poláros. A csóvafény az 1. és 3. kép között merőleges rezgést mutat, tehát úgy, mint maguk a képek, mert származása is e képekével egyező, t. i. az eredeti csóvafényből balratörítés útján keletkezik. Az 1. és a 2., továbbá a 3. és 4. képek közti csóvák

jellege olyan, mint az eredeti, az alsó præparatumnál észlelhető csóváé, vagyis uralkodók bennük a párhuzamos rezgések, de inkább a 2. és 4. képek tájékán s azokon túl is. Van azonban e csóvákban merőleges rezgés is, de ez inkább az 1. és a 3. képek közelében merül fel s aztán folyton gyengülve terjeszkedik a 2. és a 4. képek felé. A mi végre a 2. és a 4.

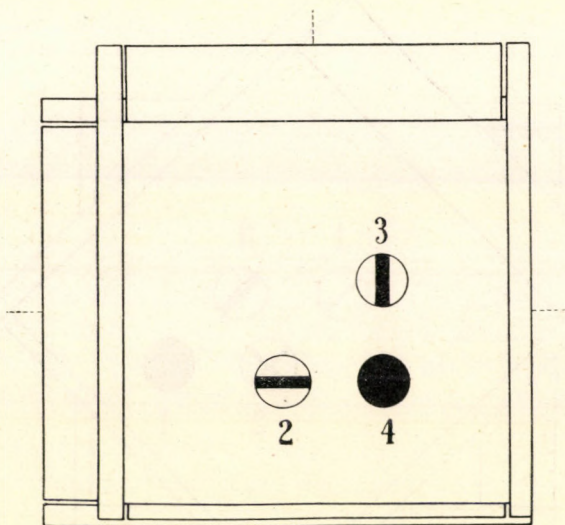


7. ábra.

képek közti csóvafényt illeti, az olyformán áll elő, mint maguk a 2. és a 4. képek, t. i. az eredeti csóvafényt a lemezek jobbfelé vezetik. A csóvafénynek ez a részlete a lemezek üveganyagából jön elő s rezgései részint merőlegesek, részint párhuzamosak. Találunk e csóvafénynél még olyan párhuzamos rezgéseket is, a melyek a közökből jönnek elő.

A 3-ik helyzetben a lemezek egymással 90° -ú szöget alkotnak. A képek elhelyezkedését a 8. rajz mutatja. Az 1. kép

igen sötét, mert ennek fényerőssége a præparatum elforgatásával nemcsak a 45-ik fokig, hanem tovább is gyengül egész a 90-ik fokig, úgy hogy 90°-nál, ha az eredeti balkép elég tiszta poláros kép, teljesen is elenyészik, s csak akkor látszik belőle valami, ha az eredeti balkép párhuzamos rezgéseket tartalmaz. Ha az 1. képből mutatkozik valami, akkor az épen úgy, mint a 3. kép s a köztük levő gyenge csóvafény, a felső

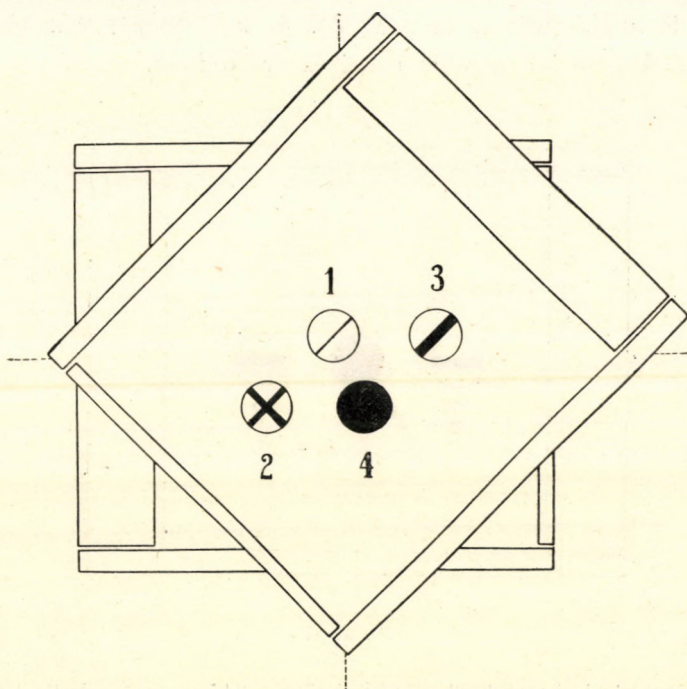


8. ábra.

præparatum lemezeire merőleges rezgésű fényt mutat. A 4. kép nem poláros. A 2. képnél a merőleges componens a 45°-on túl is folytonosan gyengül, a párhuzamos meg erősödik, úgy hogy 90°-nál a merőleges componens teljesen elgyengül, s a kép újra poláros lesz, de párhuzamos rezgéssel. A csóvafényről azokat kellene megismételniünk, a miket már az előző helyzetnél elmondottunk, legfeljebb kiemelhetjük, hogy az 1. és 2. képek közti csóvafény igen gyenge.

A 4-ik helyzetben a lemezek egymással 135°, ill. 45°-ú szöget képeznek s dőlésük ellentétes irányú. A felmerülő viszo-

nyokat a 9. rajz mutatja. Az 1. kép újra látható lesz s a rezgések, épen úgy, mint a 3. képnél s a köztük levő csóvánál is, megint csak merőlegesek a felső præparatum lemezkéire. A 2. képre jellemző, hogy 90° után a merőleges componens újból erősödik, a párhuzamos pedig gyengül s a két componens ismét egyenlő erős lesz, a kép nem poláros. A 4. képről

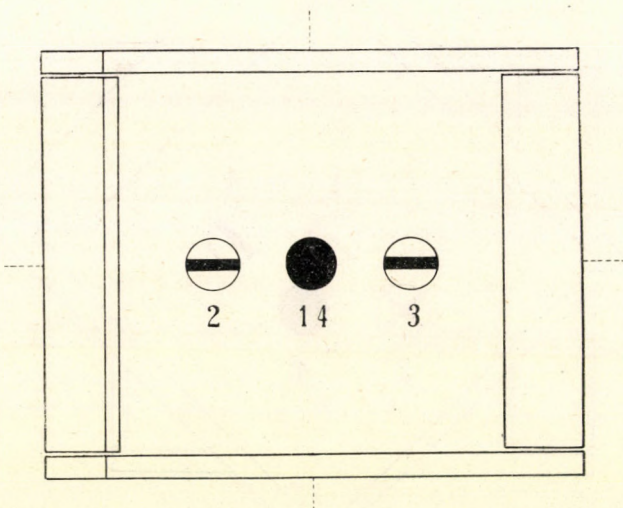


9. ábra.

és a többi csóvarészről ugyanazt kell mondanunk, mint az előző helyzeteknél.

Az 5-ik helyzetnél, a midőn a lemezkék 180° , illetőleg 0° -ú szöget képeznek egymással, a négy kép újból egy vonalba kerül (lásd a 10. rajzot), mivel azonban a lemezkék dülése ellentétes, más lesz a kép egymásutánja, mint az az első helyzetnél volt. A sorozat bal szélére a 2. kép esik, mert az alsó præparatum balképét a felső præparatum lemezkéinek

üveganyaga ide vezeti. A középső kép kettős, az 1. és 4. kép összeesik. A sorozat jobb szélén van a 3. kép. Az 1., 2., 3. képek fénye poláros és pedig, úgy mint az első helyzetben is találtuk, mind a háromban merőleges rezgések uralkodnak. A 4. kép nem poláros. A csóvafény olyformán jellemezhető, mint az 1-ső helyzetnél: a 3. kép közelében a merőleges rezgések lépnek fel s a többi helyeken is felmerülnek alárendelten, de tulajdonképpen már az (1., 4.) kép tájékán s azon túl is a 2. kép felé a parallel rezgések uralkodnak.



10. ábra.

A többi helyzetekről (225° , 270° , 315°) nem kell külön szólnunk, mert ezek teljesen symmetrikusak a 4-ik, 3-ik és 2-ik helyzetekhez és semmi újat nem tartalmaznak.

A fényjelenség leírt változásainál fontos tulajdonságot mutat az 1. és a 3. kép, a melyek minden helyzetben poláros képek és pedig rezgésök mindig merőleges a felső præparatum lemezekéire, rezgésök iránya tehát a præparatum fordításával folytonosan változik. E mellett a 3. kép fényerőssége nagyjában ugyanaz marad, ellenben az 1. kép (a mely különben a képek között általában a legsötétebb) változik: legvilágosabb az 1-ső

és az 5-ik helyzetben, a midőn rezgéseinek iránya egyezik az eredeti balkép rezgéseinek irányával, s legsötétebb az ezekre derékszög alatt álló 3-ik és 7-ik helyzetben.

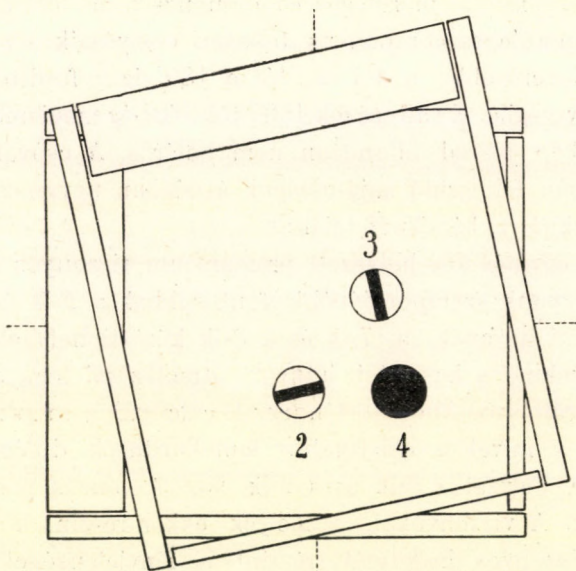
Fontos a 2. kép viselkedése is. E kép az 1-ső helyzetben merőleges rezgést mutat, mint az eredeti balkép. A képnek fénye a felső præparatum fordításánál kezd az üveglemezekben depolarizálódni, úgy hogy 45° -ú szögnél a parallel componens egyenlő a merőleges componenssel, a 90° -ú szögnél pedig a merőleges componens teljesen elenyészik s a parallel ekkor a legerősebb; a 90° -on túl a 180° -ig a fordított folyamat megy végbe. E változások 180° -tól 360° -ig megismétlődnek.

A 4. kép marad állandóan nem poláros. A csóvafény változásában felmerülő sajátosságok általában ugyanazok, mint azt maguknál a képeknél találtuk.

A két egymás fölé helyezett præparatum viszonyos helyzetei közül tárgyunk szempontjából legfontosabbak a 2-ik és a 3-ik, vagy a mi ugyanaz, a 7-ik és a 8-ik közötti helyzetek, mert a kristályoknál a hasadási irányok átmetszései leggyakrabban a 90° körüli szögekben történnek. A calcitnál a metszés szöge $101^\circ 53'$, s mivel a calcitnál a lamellarítások dűlése egyező irányú, e helyzet a 3-ik és a 2-ik között van és pedig közel a 3-ikhoz. A viszonyokat, a melyek ekkor részint a præparatumok viszonyos helyzetét, részint a fényjelenséget illetőleg felmerülnek, a 11-ik rajz mutatja. Az 1. kép igen gyengén látszik, de a többi három kép jól látható, és nagyon tanulságos, hogy a 2. és a 3. kép ellentétesen poláros képek, úgy hogy a nikolt forgatva azt találjuk, hogy az egyik eltűnik, midőn a másik megvilágosodik és megfordítva, vagyis azt a jelenséget észlelhetjük, a melyet a calcit két képe mutat. A jelenség annál is érdekesebb, mert a két kép közel egyenlő fényerősségű, mintegy egyenrangú kép. Ha a két præparatumot igen vékony lemezekből készítjük, hogy az alsó præparatum balképe mentől tökéletesebb poláros kép legyen, s a dűlés szögét 57° -nál valamivel magasabbnak vesszük, hogy a balkép fényéből a merőleges rezgések egy részét jobbfelé vezessük s

a csóva parallel rezgései is jobban a jobbkép felé huzódjanak, akkor az 1. kép elő sem tűnik, de a 2. és a 3. kép jól láthatók s határozott poláros jellegűek. A jelenség ekkor egészben sötétebb, de alakilag még közelebb jut a kettőstörésnek nevezett jelenséghez.

E jelenség tárgyunkat illetőleg kétségkívül fontosnak veendő, de nem annyiban, mintha a két præparatum e helyzetben a



11. ábra.

calcitnál felmerülő kettőstörés jelenségét adná meg, mert attól még jelentékenyen messze áll, részint mert a lemezek dőlés-szöge más, részint mert a calcit belső szerkezete sokkal összetettebb és tökéletesebb, hanem annyiban fontos, hogy eléggé kifejezi, hogy a lemezes szerkezetekben, a melyekben bizonyos dőlés fokkal bíró lamellaritások egymást keresztezik, két egymással ellentétesen poláros képnek létrejövetele általánosságban véve lehetséges.

A két egymás fölé helyezett præparatummal mi tulajdonképen csak kétfajta lamellaritást, az *a* és a *b* lappal párhuz-

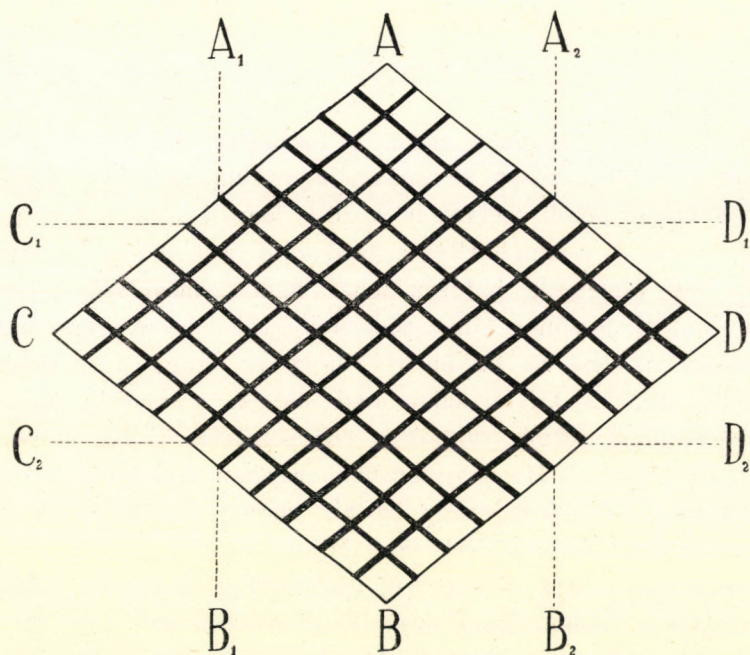
mos lamellaritásokat utánoztuk. A vízszintes lamellaritás behatását a fényjelenségre nem észlelhettük, mert a két præparatum tulajdonképen csak két vízszintes lamellát képvisel, míg a calcitnál a c lappal párhuzamosan a vízszintes irányban számtalan lamella helyezkedik el. Oly præparatumról, a mely a vízszintes lamellaritás hatását feltüntetné, jelenleg még nem számolhatok be, de mivel a vízszintes lamellaritás a másik két lamellaritással teljesen egyenrangú, önként következik, hogy annak polarizáló hatása s általában egész szerepe is teljesen egyenrangú azokéival.

C) A jelen értekezés elején a harmadik főkülönbséget, a mely a mesterségesen készített præparatum belső szerkezete és a calcit belső szerkezete között fennáll, abban találtuk, hogy az a , b , c lamellaritások (lásd az 1. rajzot) egymást kölcsönösen átmetszik, hatásuk tehát nem egymásutáni, hanem simultan. E kölcsönös átmetsződésnek a calcit belső szerkezetét illetőleg az lesz az eredménye, hogy az csupa apró rhomboéderekre, kis kristálykákra darabolódik, a melyek között intervallumok, közök vannak a környezetből felvett intervallumbeli anyaggal. Ha a viszonyokat rajzban feltüntetjük (lásd a 12. és a 13. rajzot), vagy ha kis rhomboéderekből állítjuk össze a nagy rhomboédert, azt találjuk, hogy a lamellaritások metsződése folytán mintegy új testmértani viszonyok jönnek létre. A kis rhomboéderek ugyanis egyes oszlopokat, colonnákat alkotnak, a melyek úgy hajolnak, mint magának a nagy rhomboédernek élei s a colonnák tengelyei párhuzamosak azon fősíkkal, a mely a calcit rhomboéder jobb és bal élén (lásd az 1. rajzot) megy keresztül s a c lapnak két tompaszögét felezi. A colonnák azonkívül szabályos sorozatokat alkotnak (lásd a 12. rajzot), a melyek részint párhuzamosan mennek az előbb említett fősíkkal (AB , A_1B_1 , ...), részint pedig arra merőlegesek (CD , C_1D_1 , ...). A későbbiekben meggondolásainkat a lamellaritások mellett ezen kis kristálykákra, a colonnákra s azok sorozataira is ki kell terjesztenünk.

A lamellaritások kölcsönös átmetsződésének most említett

eredményét testmértani eredménynek mondhatjuk. Ezzel kapcsolódik az a hatás, a melyet a lamellák kölcsönös átmetsződése az optikai jelenségre gyakorol. Erre jelenleg csak egy-két megjegyzés alakjában szándékunk rátérni.

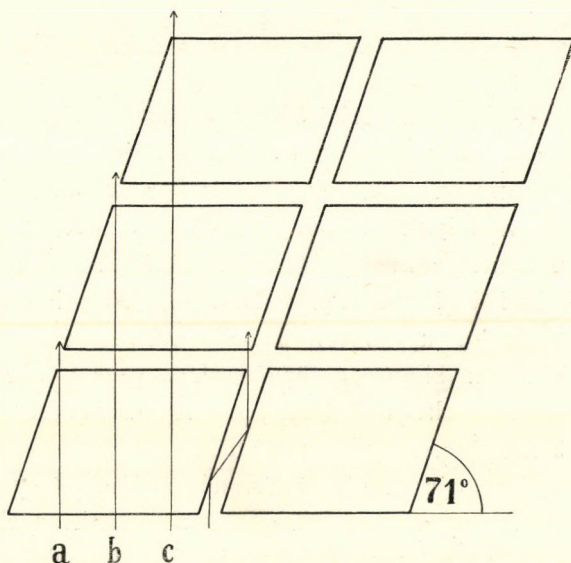
Az előzőekben azt találtuk, hogy a lemezke-sorozat a fényt-bebocsátó nyíláson átjövő sugarakat három csoportra osztja



12. ábra.

és pedig két polarizált és egy nem polarizált csoportra. A két polarizált csoport sugarainak rezgései egymásra derékszög alatt történnek s maguk a sugarak a következőképp helyezkednek el. Mindkettőnek főmennyisége a kisebb fokoknál a centrális ponttól balra, a nagyobb fokoknál attól jobbra helyezkedik el, de mégis azzal a különbséggel, hogy a lemezkék lapjával parallel rezgésű sugarak közelebb a centrális ponthoz maradnak, a merőleges rezgésűek pedig távolabb balra, illetőleg távolabb jobbra helyezkednek el. E mellett azt is találtuk,

hogy a præparatum mind a két fajta polarizált sugárcsoportot meglehetősen szétterjeszti, úgy hogy a parallel rezgésű sugarak csak a 40 körüli s annál kisebb fokoknál tudják a fénytbebo-esátó környílás kerek képét adni, t. i. akkor, midőn a lemezhék erősebb dőlésével több sugár tud a baloldalon csoportosulni; a merőleges rezgésű sugarak pedig a 65—70-hez közel álló fokoknál is még képesek kerek képét létesíteni, a mely



13. ábra.

mint említettük, kissé messzebb esik balra a centrális ponttól. A még magasabb fokoknál egyik csoportbeli sugarak sem tudnak tisztább contourú képet alkotni, a minek okát a fény-sugarak szétszóródásán kívül abban is kell keresnünk, hogy a lemezhék magasabb állásánál a sugarak főmenyisége a lemezhékbe, azok üveganyagába hatol, s abban megkötve halad a felszínig, s nem esik a lemezes szerkezet polarizáló hatása alá. E kötött sugarak alkotják a sugarak harmadik csoportját s képezik a nem polarizált jobbképet.

Hogy a calcitot jellemző centrális helyzetű és polarizált ordinarius kép és a tőle jobbra eső ellentétesen polarizált extraordinarius kép kialakulhasson, arra nézve kedvezőbbek a viszonyok, ha a lemezek mentől vékonyabbak, mert a sugarak nem terjeszkednek szét annyira, másrésről meg arra is behatással vannak, hogy a parallel rezgésű sugarak inkább a centrum tájékán csoportosulnak, a merőleges rezgésűek meg inkább tudnak a jobb oldalon csoportosulni s a maximum előbb, vagyis kisebb szögeknél jut át a jobboldalra.

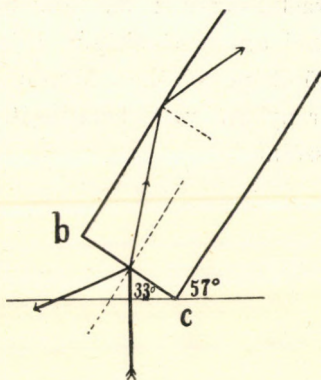
Hivatkoztunk azonban arra, hogy a két fajta polarizált kép kialakulására nézve kedvező feltételt nyújt maga a többirányú lamellaritás s a lamellaritások kölcsönös metsződése. Ha ugyanis szemügyre vesszük a 13. rajzot, látjuk, hogy a lamellaritások, különösen a vízszintes lamellaritás metszése megszünteti azt a folytonosságot, a melyet az üveglemezeknél találtunk, s a mely a nem poláros jobbképet, illetőleg a kettős præparatumbeli 4. képet hozta létre. A fény tehát nem fog, vagy kevésbé fog ugyanazon lamella irányában tovahaladni, hanem a közökön kilépve a függélyeshez, vagyis a centrális ponthoz közelebb helyezkedik el, s a lemezes szerkezet természetének megfelelőleg polarizálódik.

A lamellaritások ezen kölcsönös metsződése a fény belépési viszonyait is szabályozza, a mire szintén tettünk az előzőkben hivatkozást, mert a fénynek belépési módja is behatással van arra, hogy a fény lehetőleg ne a lamellák anyagában haladjon végig, hanem mentől inkább a szerkezet polarizáló hatása alá kerüljön. Erre nézve említettük, hogy a 2. rajzban feltüntetett *abc* beszögellések, a melyek a præparatum alsó felületén felépnek, a calcitnál nem képződnek, mert az alapot kis rhomboéderek alsó lapjai képezik, mint azt a 4. rajz mutatja. Ez első pillanatra kedvezőtlennek mutatkozik a fény belépésére, mert az intervallumba közvetlenül kevesebb fény jut be, itt azonban más körülmények válnak kedvezőké.

Először is fontos befolyása van annak, hogy a lamellaritások kölcsönös metsződése folytán létrejött új intervallumok,

közök miatt azon sugarak is (13. rajz *a*, *b*, *c*) a közökbe lépő sugaraknak tekintendők, a melyek keresztül haladva az alsó kis rhomboéder anyagán, a felette levő közön merőleges irányban kimennek.

Egy másik itt tekintetbe veendő körülmény a következő. A præparatum lemezkéinél a fény, a mely a *bc* oldalnak (lásd a 2. és a 14. rajzot) ütközik részben a laptól elreflektáltatik, főrésze pedig megtörtetve a lemezke anyagába hatol s ott úgy ütközik az oldalfalakba, hogy semmiféle sugár, illetőleg oly kevés sugár hatol ki az oldalfalakon, hogy a kísérleteknél, a melyeket különböző vastagságú üveglemezekkel eszközöltem, semmiféle kihatóló fényt észrevenni nem tudtam, jóllehet a lemezeknek különféle dűlést adtam, s a fény nem volt szigorúan a merőleges irányból jövő fény. Ha ellenben az üveglemez alsó szélét olyformán lecsiszoljuk, a mint azt a 4. rajz mutatja, s az így kapott lapot egy alapra fektetjük, a melyen kis nyílás van, akkor a nyílásból jövő fény a totalreflexió szögénél nagyobb szögeknél is átmegy az üveglemez oldalán, a mit a lemezke 57° -ú dűlésénél jól, sőt még a 71° -nál is elég jól észrevehetünk, ha a környezetet kissé sötétítjük. A magasabb fokoknál az áthatoló fény mennyiség fokozatosan kevesebb, mert fokozatosan több marad magában a lemezke anyagában. A mi a kis rhomboédereket illeti, nem szándékozom most a szigorúan merőleges irányból jövő egy sugárnak esetét venni tekintetbe, hanem csak általában akarok az előbbi kísérletekre hivatkozni, a melyek azt mutatják, hogy a vízszintes basislapokkal ellátott szerkezetnél több sugár tud az oldallapokon áthatolni, mint azt a præparatumnál találjuk. A fénynek az a része, a mely ily módon az oldalfalakon át tud hatolni, úgy tekinthető, mint kö-



14. ábra.

zökbe hatolt fény, a mely elhagyja az eredeti colonnát és polarizálódhatik.

A fénynek említett belépési és a lemezes szerkezetben továbbadási viszonyaival más igen fontos körülmények kapcsolódnak, a melyekre szintén ki kell terjeszkednünk. Így például, ha a 3. rajzban feltüntetett eljárást tovább folytatjuk s a lemezkéket mindinkább vékonyítjuk, kérdésessé válik, hogy az intervallumok tágasságát milyennek kell felvennünk. Általánosságban felvehetjük, hogy az intervallumok a calcitnál keskenyebbek, mint azt a lemezke-sorozatnál találjuk, de más kérdés, milyennek kell vennünk a közök tágasságát a lemezkék vastagságához mérten. Szólnunk kell továbbá az intervallumbeli anyag törőképeségéről, viszonyítva a lemezkék anyagának törőképeségéhez. Mindezek befolyásolják a fénynek a merőleges irányban való haladását. Ezekről más alkalommal szándékom szólni.

Terlanday Emil.

A RELATIVITÁS ELVÉRŐL.¹

A mozgó testek elektrodinamikájára vonatkozó újabb kísérleti és elméleti vizsgálatok oly eredményekre vezettek, melyeknek fontossága messze túlterjed az elektrodinamikának, sőt az egész fizikának körén és alkalmasak arra, hogy új és magasabb szempontból világítsák meg a tér és időre vonatkozó eddigi fogalmainkat.

A tér és időnek ezen újabb felfogását az ú. n. *relativitás elvében* lehet összefoglalni, melyről PLANCK azt mondja, hogy csak a Copernicus-féle világfelfogás okozhatott hozzá hasonló átalakulást természettudományi alapfogalmainkban. Bizonyára akadnak olyanok, a kik PLANCK e megjegyzését túlzásnak fogják minősíteni, mert — a mint látni fogjuk — a relativitás elve csak oly rendszerekben vezet az eddigiektől eltérő törvényekre, a melyeknek sebessége a fénysebességgel összemérhető; a relativitásnak kiváló elvi jelentősége azonban egy pillanatra sem vonható kétségbe, minthogy bántó elektrodinamikai és optikai paradoxonok nyernek általa teljesen kielégítő magyarázatot.

Egy rövid előadás keretében nem lehet ezen elvnek teljes tartalmát kifejteni, sem pedig mindama következményekre kiterjeszkedni, a melyek ezen elvből a fizika különböző ágaiban vonhatók, ezért csupán ama kísérleti és elméleti eredmények ismertetésére szorítkozom, a melyek a relativitás elvének bevezetését előidézték, s ezek után röviden jellemzem magát az elvet és legfontosabb folyományait.

★

¹ Előadta a szerző a Math. és Phys. Társulat 1911. évi közgyűlésén.

Az idő mérésére szolgáló jeleket az ismert legnagyobb sebességű «közlekedési eszköz», a fény közvetíti; az időszámításunk alapjául szolgáló csillagászati jelenségek szintén a fény útján jutnak tudomásunkra s az időjelzés legújabb módja, a drótnélküli táviró ugyancsak a fény sebességével tovaillelő jeleket szolgáltat. Mindaddig, a míg oly jelenségek vizsgálatára szoritkozunk, a melyek sebessége a fény terjedésének sebességéhez képest kicsiny, az abszolút idő fogalmának használata semmiféle ellenmondásra nem vezetett, mert hiszen az alapul szolgáló óra időjelei úgyszólván egy pillanat alatt a megfigyelési tér minden pontjába eljutottak s az időjel tovaterjedése közben a megfigyelt rendszerek állapota majdnem teljesen változatlan maradt. Ámde mindjárt megváltozik mindez, mihelyt oly sebességű mozgásokat figyelünk meg, a melyek a fény terjedésségével már összemérhetők; ezért késett az idő relativitásának felismerése mindaddig, a míg a fénysebességgel összemérhetően gyors mozgások kezdtek a tudósokat érdekelni. Mondanom sem kell, hogy az érdeklődés ilyen irányítása ismét az annyira divatos «elektron»-oknak köszönhető, ámbár a relativitás elvének alapját alkotó MICHELSON-féle interferencia-kísérlet eredménye — melynek ismertetésére azonnal rátérünk, — független minden elektronelméleti föltevéstől.

A relativitás elvének kifejlődése ugyanis a következő két, ma általánosan elfogadott fizikai igazsághoz kapcsolódik.

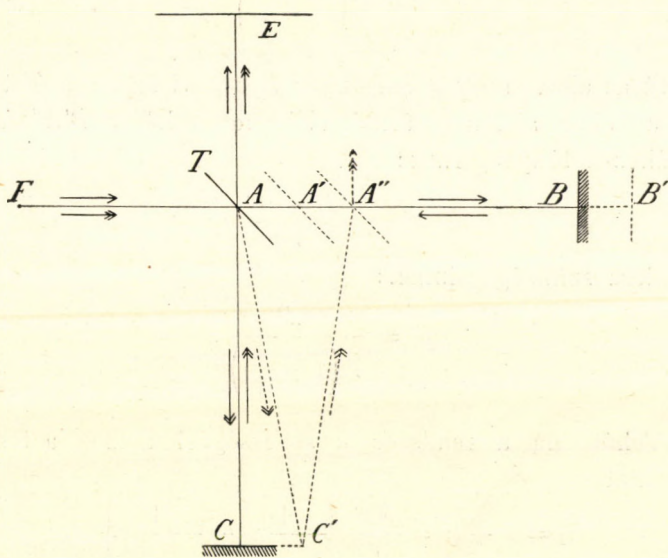
1. A fény tovaterjedésének sebessége független a fényt kibocsátó anyag sebességétől.

2. MICHELSON kísérletének eredménye.

Az 1. állításra nézve ugyan döntő kísérleti bizonyítékunk nincsen, ánde a dolog egyrészt nehezen képzelhető el más-képpen, de másrészt ezen föltevés elejtése több maig vele igen jól megmagyarázható jelenség leírásában le nem küzdhető nehézségeket okoz. Példaképpen említem a fény aberrációját.

2. Kissé részletesebben szándékozom MICHELSON kísérletével foglalkozni, melynek alapgondolata még MAXWELL-nél megtalálható.

Az F fénypontból (l. a rajzot) fénynyaláb indul ki, mely a T planparallel üveglapon részben megtörik, részben visszaverődik; a törött sugár kilépése után irányának megváltoztatása nélkül a B tükörrre esik, ott visszaverődik és visszatértében a T tükrön ugyancsak visszaverődve az E megfigyelő ernyőre esik; a fénynyaláb másik fele előbb verődik vissza a T tükrön, újabb visszaverődést szenved a C tükrön és visszajövet irányváltozás nélkül halad át a T tükrön és ugyancsak az E ernyőre



esik. A két találkozó fénynyaláb, ha összes befutott útjuk $FA + AB + BA + AE$ és $FA + AC + CA + AE$ közel egyenlők, interferálni fog s az E ernyőn interferencia csíkok fognak megjelenni.

Képzeljük most, hogy az egész rendszert, mint merev rendszert az FB irányban egyenletes sebességgel mozgatjuk; akkor, ha a fény sebessége, az 1. föltevés értelmében független az F fénypont sebességétől, az AB mentén haladó I. fénysugárnak több időre lesz szüksége míg az E ernyőhöz ér, mint előbb. Azon idő alatt ugyanis, a mely alatt a fény A -ból

a B tükörré esik, a B tükör eredeti helyzetéből mondjuk B' -ig eltolódik; ha V -vel jelöljük a fénynek állandó tovaterjedési sebességét, ha t' az az idő, mely az AB' út befutásához szükséges és v az egész rendszernek sebessége az FB irányban, akkor:

$$t' = \frac{AB + vt'}{V}$$

tehát:

$$t' = \frac{AB}{V \left(1 - \frac{v}{V}\right)} \quad (1)$$

viszont az alatt, hogy a fénysugár B' -ből visszatér a T tükörhöz, a tükör a fénysugárnak elébe fut, tehát a $B'A''$ út befutásához a fénysugárnak:

$$t'' = \frac{AB - vt''}{V}$$

időre lesz szüksége; innen:

$$t'' = \frac{AB}{V \left(1 + \frac{v}{V}\right)} \quad (2)$$

Tehát, ha a rendszer v sebességgel mozog, a fény az ABA utat

$$t_1 = t' + t'' = \frac{AB}{V} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{v}{V}} + \frac{1}{1 + \frac{v}{V}} \right\} \quad (3)$$

sebességgel futja be; tekintve, hogy $\frac{v}{V}$ a megvalósítható sebességek esetén kicsiny, a következő közelítésekkel megelégedhetünk:

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{V}} = 1 + \frac{v}{V} + \frac{v^2}{V^2}$$

és

$$\frac{1}{1 + \frac{v}{V}} = 1 - \frac{v}{V} + \frac{v^2}{V^2}$$

tehát a (3)-ból:

$$t_I = \frac{2AB}{V} \left\{ 1 + \left(\frac{v}{V} \right)^2 \right\}, \quad (4)$$

míg a nyugvó rendszerben ugyancsak az ABA lefutásához szükséges idő

$$t_{10} = \frac{2AB}{V}$$

Ámde az ACA út befutásának ideje sem marad változatlanul a v sebesség jelenlétekor; hiszen mire a fény A -ból a C tükörre esik, akkorra a C már a v irányában elmozdult, tehát a fénynek hosszabb utat kell megtennie a visszaverődésig, hasonlóképpen hosszabb a visszavert sugár útja is C' -től A'' -ig. Világos, hogy megengedhető közelítéssel:

$$(AC')^2 = \sqrt{(AC)^2 + \left(\frac{vt'}{2} \right)^2}$$

hacsak AB eredetileg $= AC$.

E szerint a II sugár átkelési ideje a mozgó rendszerben a másodfokú tagok megtartásával:

$$\begin{aligned} t_{II} &= \frac{2AC'}{V} = \frac{2AB}{V} \left\{ 1 + \frac{v^2 t'^2}{8AB^2} \right\} \\ &= \frac{2AB}{V} \left(1 + \frac{v^2}{2V^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

A sugarak átkelési idejének különbsége tehát:

$$t_I - t_{II} = \frac{AB}{V} \cdot \frac{v^2}{V^2} \quad (6)$$

E szerint, ha az E ernyőn a nyugvó rendszerben megfigyeltük az interferencia csíkok helyzetét, azután a rendszert v sebességgel mozgásba hozzuk, a csikrendszernek a $(t_I - t_{II})V$ útkülönbségnek megfelelően el kellene tolódnia.

MICHELSON a kísérletnél a v sebesség előállítására magának a Földnek Nap-körüli keringését használta fel. Ámbár a $\frac{v}{V}$ alig több 0.0001-nél, tehát $\frac{t_I - t_{II}}{t_I}$ alig több egy százmillio-

modnál, tekintettel az optikai mérések rendkívüli érzékenysége, remélhető volt a különbség kimutatásának lehetősége. A kísérletet a következő módon végezte: merev állványra szerelte az *FABCE* rendszert, mely a *T*-n átmenő tengely körül tetszés szerint forgatható volt; úgy irányította előbb az eszközt, hogy *AB* a Föld Nap-körüli keringésének irányával összeessék, megfigyelte a csikrendszer helyzetét, azután az egész rendszert elforgatta úgy, hogy az *AB* most az előbbivel ellenkező irányba mutatott, a csikrendszeren tehát az előbb kiszámított útkülönbség kétszeresének megfelelő eltolódást kellett volna észlelnie.

Ámde úgy legelső, 1881-ben végzett mérései alkalmával, mint ama rendkívül gondos kísérleteiben, a melyeket ez irányban MORLEY-vel közösen végzett 1887-ben, a csikrendszer a látótérben mozdulatlan maradt. Az utolsó kísérletek alkalmával a csikrendszernek egy csikszélesség $\frac{2}{5}$ részével kellett volna eltolódnia, a mit feltétlen biztossággal észre kellett volna venni.

A MICHELSON-féle kísérletnek bármilyen eredménye kemény próbára teszi a fizikus gondolkodását. Tegyük fel, hogy az eredmény nem lett volna negatív, hanem a csikrendszer valóban eltolódott volna, a megelőzőkben közölt számításoknak megfelelően, akkor ennek az eltolódásnak nagyságából a *v* sebességet ki lehetett volna számítani; ámde mit jelent ez a *v* sebesség képleteinkben? semmivel sem kevesebbet, mint a kísérleti eszköz *abszolút* mozgásának sebességét. Mert ha mi azt mondjuk, hogy a fény az üres térben a fényforrástól független *V* sebességgel fut tova, akkor ez által azt képzeljük, hogy a fény az abszolút nyugalomban lévő térben — vagy ha jobban tetszik az éterben — terjed, a *v* pedig a kísérleti eszköz (a Föld) sebessége ezen abszolút térhez képest. Ámde egész világfelfogásunk a mozgások ill. a *tér* relativitásán alapszik, abszolút mozgást semmiképpen elképzelni nem tudunk, úgy, hogy — ha eddigi világfelfogásunkhoz ragaszkodni akarunk — azt kell mondanunk, hogy a MICHELSON-féle kísérlet-

nek nem is szabad pozitív eredménnyel végződnie, az *interferencia-csík*oknak nem szabad eltolódniok, mert különben lehetséges volna az abszolút mozgásnak a felismerése.

Ámde hol akkor a hiba az előrebocsátott okoskodásban? Ha az 1. föltevést a MICHELSON-féle kísérlet negatív eredményének megmagyarázása céljából elejtjük, bonyolult és még nehezebben megoldható ellenmondásokra bukkanunk.

LORENTZ és FITZGERALD egy sajátságos, merész és első pillanatra igen mesterkélt föltevést vezetett be, csak hogy a dilemmából kiszabaduljanak. Föltették ugyanis, hogy minden tárgy, mely a térben v abszolút sebességgel mozog, a mozgás irányába eső méreteit

$$\left(1 - \frac{v^2}{2V^2}\right) : 1$$

megrövidíti, a MICHELSON-féle kísérletben tehát a t_I időt nem a (4) képlet szolgáltatja, mert az a hosszúság, a mely abszolút nyugalom esetén AB -vel egyenlő, a v sebességgel mozgó rendszerben csak

$$\frac{AB}{1 + \frac{v^2}{2V^2}}.$$

A $2AC$ megrövidülése tehát $\frac{ACv^2}{V^2}$ lévén, ez éppen kompenzálja a

$$t_I - t_{II} = \frac{AC}{V} \cdot \frac{v^2}{V^2} \quad (6)$$

alatt kiszámított időkülönbséget és a csíkrendszer nem fog eltolódni.

Tagadhatatlan, hogy a mozgó rendszerek méreteinek megváltozásában sok az idegenszerű; a fizikusok minden oldalról ellenvetéseket hoztak fel az említett föltevéssel szemben, egyrészt azt hangoztatva, hogy a tárgyak méreteinek megváltozásában ismét az abszolút nyugalomban lévő térre vonatkoztatott v sebesség lép fel, a mit elvi okokból kerülni kellene, ámde még figyelemreméltóbbak voltak ABRAHAM ellenvetései,

a ki az ú. n. *Lorentz-kontrakciót* az energia megmaradásának elvével tartotta összeférhetetlennek. LORENTZ viszont az elektrodinamikát hívta segítségül és megmutatta, hogy a mozgó elektronokból kiinduló erővonal rendszerek ugyancsak olyan rendű deformációkat szenvednek, mint a milyeneket a merev testek mozgása alkalmával feltételezett, ha tehát az anyagot elektronsoportokból összerakva képzeljük, már nem látszik oly lehetetlennek a méreteknél a mozgás irányában való megváltozása. A vita kísérleti eldöntését egyébként nagy sebességgel mozgó elektromos töltésű részecskéken (a rádium β sugarain) végzett mérésektől várták, a melyek mágneses és elektrosztatikus eltérítésére nézve a deformált elektron és a merev ABRAHAM-féle elektron elmélete különböző eredményre vezet.

A kísérletek ezidőszent nem szolgáltatnak döntő bizonyítékot sem LORENTZ-nek sem ellenfeleinek elmélete mellett, úgy, hogy a MICHELSON-féle kísérlet éveken át az elektrodinamikának és optikának Achilles-sarka maradt.

A. EINSTEIN volt a legelső, a ki az egész gordiusi csomót kibogozta, azzal az egyszerű megjegyzéssel, hogy *az összes ellenmondások az idő fogalmának tökéletlen definíciójából származnak*; LORENTZ elmélete és az összes eddigi fizikai megfontolások a részletesebben nem definiált *abszolút* idővel dolgoznak, pedig az abszolút idő épp oly kevésbé képzelhető el, mint az abszolút tér; az időt tehát pontosan kell definiálni, és szigorúan ragaszkodni minden jelenség relativ voltaához, ezzel az összes ellenmondások önmaguktól elesnek.

Hogy az abszolút idő fogalma, — úgy a mint ma a fizikában használjuk — milyen egyszerű esetekben felmondja a szolgálatot, arra nézve jellemző a következő, több szerzőtől felhozott példa:

Képzeljük egy pillanatra a Földet és a Napot nyugalomban; a fény a Naphól kiindulva a közbeeső távolságot 500 másodperc alatt futja be; ámde, ha az egész Nap-rendszer a Földet a Nappal összekötő egyenes irányában egyenletes mozgást végezne, a mit mi semmiképen észre nem vehetünk, a Nap-Föld

távolság befutásához szükséges idő rövidebb lesz 500 mp.-nél, ha a Nap-rendszer a Földtől a Nap felé mutató egyenes irányában mozog, mert hiszen a Föld elébe siet a fényhullámoknak. Ellenkező irányú mozgás esetében a fénynek 500 mp.-nél nagyobb időre van szüksége, hogy ugyanazt a távolságot befussa.

Mi lesz tehát a *valódi* átkelési ideje a fénysugárnak? A relativitás elve szerint ennek a kérdésnek épp úgy nincs értelme, mint ha azt kérdeznők, mi a *valódi* sebessége a Földnek a világűrben.

Lássuk most már EINSTEIN gondolatmenetét¹:

EINSTEIN rendszerét a következő alapelvre építi fel, melyet a relativitás elvének nevez: Az abszolút nyugalomnak a jelenségek semmiféle sajátága nem felel meg sem a mechanikában, sem az elektrodinamikában; mindazon koordinátarendszerekben, a melyekben a mechanikai differenciálegyenletek változatlanok, módosítás nélkül érvényesek az elektrodinamika alapegyenletei, tehát sem mechanikai, sem elektrodinamikai módszerek útján nem lehetséges tudomást szereznünk a testek abszolút mozgásáról. A MICHELSON féle kísérletnek e szerint a relativitás elve alapján negatív eredménnyel kell végződnie, s az időt kell úgy definiálni, hogy a mechanika és elektrodinamika differenciálegyenletei egyenletesen mozgó koordinátarendszerben változást ne szenvedjenek.

Az idő EINSTEIN-féle definíciója nem egyéb, mint szigorúan következetes végigtekintése annak az eljárásnak, a melyet az időnek időmérővel (órával) való leolvasásakor követünk.

Induljunk ki legelőször egy bizonyos koordinátarendszerből, melyet egyszerűség kedvéért «nyugvó rendszer»-nek fogunk nevezni. Valóságos mozgásáról csak annyit fogunk föltenni, hogy róla kísérleti úton tudomást szerezni nem tudunk, s az időt előbb ebben a nyugvó rendszerben fogjuk definiálni.

A távolságméréseket ebben a nyugvó rendszerben a közön-

¹ Annalen der Physik, 17. k. 891. l. (1905).

séges eljárással merev léptékek fölhasználásával elvégezhetjük, úgy hogy a tér bármely pontjának koordinátáit a nyugvó rendszerben meg tudjuk határozni.

Helyezzünk most el a térnek valamely A pontjába egy órát; ezen óra mutatójának állása lesz az *idő mértéke az A pontban*; ezt az időt jelöljük t_A -val. Helyezzünk most el a térnek valamely más B pontjába egy ugyanolyan szerkezetű órát, mint az A pontbeli óra.¹ Ennek az órának mutatójáról leolvassuk a *B pontbeli időnek mértékét*, t_B -t. A t_A és t_B idők egyelőre egymással még semmiképpen sem hasonlíthatók össze, mindegyik csak arra a helyre vonatkozik, a melyben definiáltuk és csak az illető helyen végbemenő jelenségek idejének megadására alkalmas, olyan módon hogy minden jelenség ideje egyenlő az illető pontbeli óra mutatójának a jelenséggel egyazon pillanatban bekövetkező állásával. Az egyidejűség megítélése érzékszerveinkkel történik s tovább nem részletezendő, ámde kiemeljük, hogy csak egyazon helyen végbemenő jelenségek egyidejűségéről van szó.

Az egyidejűségnek különböző helyekre vonatkozó definíciója végett megállapodunk abban, hogy az az időtartam, a mely alatt a fény A pontból B -be jut, ugyanakkora mint az az idő, a mely alatt B -ből A -ba jut. Ha tehát A -ból kiindul egy fény-sugár t_A időpontban és megérkezik t_B időpontban B -be, ott visszaverődik, (t_B -be időpontban visszaindul) és t'_A -ben visszaérkezik A -ba, a két órát szinchron járásúnak fogjuk mondani, ha

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

A kísérleti tapasztalat mutatja, hogy órák járásának ilyen szinchronizálása az egész világtér összes pontjaira nézve egy bizonyos koordinátarendszerben mindig sikerül; ezt mutatja éppen a MICHELSON-féle kísérlet, a melynél az ú. n. nyugvó rendszer Földünkkel van merev összeköttetésben. Az előbbi

¹ E képzelt kísérletek gyakorlati kivihetőségének nehézségei a következőkben levont eredményeket semmiképpen sem befolyásolják.

fogalmazásban szereplő abszolút t idő és abszolút v sebesség egészen elveszti jelentését az időnek és az egyidejűségnek imént közölt definíciójával.

Kísérleti tapasztalat ezenkívül az, hogy a fény tovaterjedésének sebessége, melyet ismét a MICHELSON-féle berendezést tartva szem előtt így definiálunk:

$$V = \frac{2AB}{t'_A - t_A}$$

univerzális állandó a légüres térben s az ismert módon függ a közeg minőségétől.

E megállapodásokkal tulajdonképpen már megszüntettük azt az ellenmondást, a mely az elmélet és a MICHELSON-féle kísérlet között fellépett, mert hiszen elegendő elejteni az időnek régebbi kevésbé éles abszolút fogalmát s azt az imént bevezetett t_A helyi idővel helyettesíteni, a mely idők — ha csupa viszonylagos nyugalomban lévő pontokra vonatkoznak — egymással összemérhetők és ugyanazt az egész koordinátarendszerre nézve közös t időt szolgáltatják.

Ezzel tehát — ha csak a MICHELSON-féle kísérlet magyarázatára törekszünk — czélt is értünk. Felette érdekes azonban most már annak a vizsgálata, milyen kapcsolatban vannak egymással azok az idők, a melyeket egymáshoz képest relativ mozgásban lévő koordinátarendszerekben definiáltunk. Látni fogjuk ugyanis, hogy ezen idők általában teljesen különbözök.

Bevezetésképen vizsgáljuk meg a következő esetet:

A nyugvó rendszerben legyen adva egy AB hosszúságú merev pálcza; essék AB a nyugvó rendszer x tengelyének irányába és mozgassuk a pálczát egyenletes v sebességgel a növekvő x -ek irányában (egyenletes sebesség alatt az oly mozgást értjük, mely a nyugvó rendszerben definiált időre nézve a közönséges értelemben egyenletes).

Mérjük meg az AB rúd hosszát a következő eljárással:

A megfigyelő mozogjon az AB rúddal együtt és olvassa le az AB hosszúságot egy vele együtt mozgó, AB mellé fektetett lépté-

ken. A relativitás elve alapján eme hosszúság nem különbözhetik a rúdnak a nyugvó rendszerben lemért hosszúságától, mert különben lehetséges volna a rendszeren belül végzett mérésekkel a nyugvó rendszerre vonatkozó sebességet észrevenni.

Képzeljük most, hogy a nyugvó rendszerre nézve szinchrón órákat helyeztünk el úgy az A mint a B pontba; ha a rúd v sebességgel mozog és A -ban és B -ben lévő megfigyelők órájuk szinchronizmusáról akarnak meggyőződni, az előbbi ellenőrző kísérletet fogják végezni: A -ból kiindul egy fénysugár t_A időpontban B -be jut t_B -kor, visszaverődik és t'_A -kor jut vissza A -ba; világos most már, minthogy V a nyugvó rendszerben a fény terjedéss sebessége, az előbbi (abszolút idővel végzett) számításaink érvényesek lesznek és az 1. és 2. kép let alapján:

$$t_B - t_A = \frac{AB}{V - v}$$

$$t'_A - t_B = \frac{AB}{V + v}.$$

Ez a két megfigyelő tehát azt látná, hogy óráik *nem szinchrón járásúak a mozgó rendszerben, pedig a nyugvó rendszerben szinchrón járásúak*. E szerint még az egyidejűségnek sincsen abszolút jelentése. *Két esemény, mely egyidejű egy nyugvó rendszer idejében, különböző idejű egy az előbbihez képest mozgó rendszerből megítélve*. Talán ez a legszokatlanabb folyamánya a relativitás elvének és ez veszi leginkább igénybe a fizikus abstraháló képességét.

★

Képzeljük most már a nyugvó G rendszeren és időmegállapításán (a G *téridő* rendszeren) kívül, egy második koordináta-rendszert, melynek kezdőpontja a nyugvó rendszer x tengelye mentén egyenletes sebességgel eltolódik. Ebben a mozgó I' rendszerben szintén képzeljük elvégezve az idő megállapítását,

még pedig úgy, hogy a szinchronizmus feltétele az egész Γ térre nézve ki legyen elégítve s így egy oly τ a Γ -ban egységes idő fölött rendelkezünk, mely a fény egyenletes terjedése elvének is eleget tesz, tehát ha AB a Γ rendszernek bármely két pontja, akkor a

$$\frac{2AB}{\tau'_A - \tau_A} = V$$

mindig ki legyen elégítve és a V értéke ugyanaz legyen, mint a nyugvó rendszerben.

A Γ térben a koordinátákat jelöljük ξ , η , ζ -val és keressük azt, milyen transzformáció kapcsolja össze a ξ , η , ζ , τ rendszert az x , y , z , t rendszerrel.

Minthogy a G kezdőpontjának ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) koordinátái a Γ rendszerben

$$\begin{aligned}\xi &= -vt = x - vt \\ \eta &= 0 = y \\ \zeta &= 0 = z\end{aligned}$$

és az η , ζ tengelyek az y , z -vel párhuzamosak maradnak (szimmetria okából) a transzformáció egyenletek egy részét ilyen alakban írjuk föl:

$$\xi = a(x - vt) \quad \eta = by \quad \zeta = cz \quad (7)$$

és a reciprokt transzformációt így:

$$x = a(\xi + vt) \quad y = \beta\eta \quad z = \gamma\zeta \quad (8)$$

világos, hogy: $b = \frac{1}{\beta}$ és $c = \frac{1}{\gamma}$.

Minthogy az y , z tengelyeket illetőleg a Γ rendszer a G rendszerrel fölcserélhető $b = \beta = c = \gamma = 1$ -nek kell lennie. Vegyük t -t τ és ξ lineáris függvényének, a mi a $\xi\eta\zeta\tau$ és $xyzt$ rendszerek közti egyértelmű kapcsolat és szimmetria okok alapján helyes, akkor még csak az ismeretlen együtthatókat kell megállapítanunk.

E végből használjuk fel a fény egyenletes tovaterjedésének kritériumát úgy a G , mint a Γ rendszerben:

A G rendszerben ugyanis az

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2 \quad (9)$$

egyenletnek a Γ -ban a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2 \quad (10)$$

tartozik megfelelni.

Helyettesítsük tehát be a (8)-ból x, y, z , helyére ξ, η, ζ és τ értékekben kifejezett alakjukat; t helyére pedig írjunk $m\tau + n\xi$ -t

$$\alpha^2 (\xi + v\tau)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 (m\tau + n\xi)^2$$

vagy rendezve:

$$(\alpha^2 - V^2 n^2) \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2(\alpha^2 v - V^2 mn) \tau \xi = (V^2 m^2 - \alpha^2 v^2) \tau^2.$$

Ez az egyenlet csak abban az esetben esik össze a (10)-zel, ha:

$$\alpha^2 - V^2 n^2 = 1$$

$$\alpha^2 v - V^2 mn = 0$$

$$V^2 m^2 - \alpha^2 v^2 = V^2.$$

Ezen egyenletrendszer megoldása:

$$\alpha = m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}} = \beta$$

és

$$n = \beta \frac{v}{V^2},$$

úgy, hogy a transzformációképletek végleges alakja:

$$\xi = \beta(x - vt), \quad \eta = y, \quad \zeta = z, \quad \tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \quad (11)$$

$$x = \beta(\xi + v\tau), \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = \beta\left(\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right) \quad (12)$$

Látjuk, hogy a (11) és (12) képletcsoportban az együtthatók csak a sebesség előjelében különböznek, a mi várható is, mint-hogy a két koordináta-rendszer teljesen egyenrangú szerepet visz. Ezen egyenletekből a relativitás elvének sajátzerű folyamánai már kiolvashatók.

Különösen érdekes, hogyan jelentkezik a «LORENTZ-kontrakció» ezen egyenletek alapján. Képzeljünk ugyanis a mozgó rendszerben egy merev golyót, melynek egyenlete a mozgó rendszerben τ minden értéke mellett:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 \quad (13)$$

Ugyanennek a golyónak egyenlete a nyugvó rendszerben a $t = 0$ időpontban a (11) alapján:

$$\frac{x^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2 \quad (14)$$

Ez oly forgásellipszoid egyenlete, melynek tengelyei

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, R, R.$$

A golyó tehát a nyugvó rendszerből tekintve a mozgás irányában összelapítva látszik. Ez azonban távolról sem a gömbnek oly anyagi deformációja, mely a gömb belső erői ellen történő munkavégzéssel jár; ez tisztán csak a tér és idő előrebocsátott definíciójának folyománya. A kontrakció nagysága ugyanaz, mint a mit LORENTZ vett fel a MICHELSON-kísérlet eredményének magyarázatára; ha ugyanis v kicsiny V -hez képest, akkor a megrovidülés mértéke:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} : 1 = \left(1 - \frac{v^2}{2V^2}\right) : 1.$$

A mi a gömbre érvényes, igaz lesz bármely alakú testre is; minden testnek méretei a mozgás irányában ugyanily arányban rövidek lesznek meg.

Ha a v sebesség növekszik, a megrövidülés fokozódik, míg $v = V$ -nél minden test síkidommá lapul össze. Ha $v > V$ a (14) képzetes ellipszoid egyenlete lesz. A $v > V$ esetnek tehát a relativitáson alapuló rendszerben fizikai jelentése nincs. A relativitás elve szerint tehát a fénysebességnél nagyobb sebességek lehetetlenek.

A relativitás mechanikájában ezek szerint merev rendszerek nincsenek, oly értelemben, hogy minden mozgó testnek a nyugvó rendszerben mért méretei a mozgás sebességétől függenek, míg ha a merev testeket velük együtt mozgó léptékekkel mérjük ki, méretváltozást nem tapasztalunk, mert a lépték is ugyanúgy változtatja hosszúságát, mint a kimérendő test.

Az egyidejűség viszonylagosságának jellemzésére szolgáljon a következő példa:

A mozgó rendszerben τ_1 időpontban történjék egy jelenség a $\xi_1, 0, 0$ pontban és τ_2 időpontban történjék egy jelenség a $\xi_2, 0, 0$ pontban.

A nyugvó rendszerből szemlélve az első jelenség

$$t_1 = \beta \left(\tau_1 + \frac{v^2}{V^2} \xi_1 \right) \text{ időpontban, a második}$$

$$t_2 = \beta \left(\tau_2 + \frac{v^2}{V^2} \xi_2 \right) \text{ időpontban történik.}$$

Ha pl. $\tau_1 = \tau_2$, vagyis a két jelenség egyidejű a mozgó rendszerben, általában nem lesz egyidejű a nyugvó rendszerben, mert hiszen t_1 és t_2 a ξ -ktől is függenek. Sőt a jelenségek időbeli sorrendje is teljesen megváltozhatik: legyen pl. $\tau_1 < \tau_2$, tehát történjék az első jelenség előbb; ha v vagy ξ_1 elég nagy ξ_2 -höz képest, akkor lehetséges, hogy mindamellett $t_1 > t_2$, vagyis, hogy a nyugvó rendszerben előbb tapasztaljuk a második jelenséget.

★

A relativitás elve alapján a fizika összes ágai újból építendőek fel, még pedig úgy, hogy egyazon koordináta- és időrendszeren belül az eddigi törvények maradjanak érvényben: ez

valóban sikerül az elektrodinamikában úgy, hogy a MAXWELL-féle nyugvó rendszerekre érvényes alapegyenletek egész változatlanul fennállanak, ámde a mechanikában csak úgy, hogy a tömeg fogalmának eddigi abszolút változatlansága megszűnik, a tömeg a sebesség függvénye lesz, és a végtelenbe növekszik, ha a test sebessége eléri a fénysebességet. Oly sebességek esetén, melyek kicsinyek a fénysebességhez képest, a régi mechanika változatlanul fennáll.

Az elektronok mozgására nézve a relativitás elve oly eredményekre vezet, melyek lényegesen különböznek az eddigi (pl. ABRAHAM-féle) eredményektől, úgy, hogy kathód- és rádiumsugarakon végzett mérésekkel a relativitás elvéből folyó eredmények a kísérleti ellenőrzésnek is hozzáférhetők.

Zemplén Győző.

AZ ÜSTÖKÖSÖK PÁLYÁJA.

(Adat az üstökösök kozmogoniájához).

BOHLIN K., a stockholmi observatorium igazgatója, a «Naturwissenschaftliche Rundschau» 1910. évi 44. és 45. számaiban «Neuere Untersuchungen über Kometen» czímen igen érdekes összefoglaló tanulmányt tett közzé, melyben szól: 1. az üstökösök pályáiról, az üstökösök eredetéről és üstökös-rendszerekről; 2. fényükről, szerkezetükről, a komáról; 3. az üstökösök spektrális viszonyairól; 4. uszályukról, a kisugárzás hullámzásáról és a MOREHOUSE-féle üstökösön tett észleletekről; végül 5. az utóbbi üstökös uszályában mért sebességekről.

Itt röviden csak az 1. pontban foglaltakról akarok megemlékezni kapcsolatban ELIE STRÖMGRENnek, a kopenhágai observatorium ezidőszerinti igazgatójának előadásával, melyet az «Astronomische Gesellschaft» m. é. szeptember hóban Boroszlóban lefolyt közgyűlésén «Über die kosmogonische Stellung der Kometen» czímen (szept. 16.) tartott és a mely előadás megbeszélése tulajdonképi czélom. BOHLIN a szokott — hogy úgy mondjam: statisztikai — álláspontot választja és abból indul ki, hogy kb. 350 kiszámított üstökőspálya közül 275 parabolás, mintegy 10 hyperbolás, a többi (65) ellipszises. Tudvalevőleg azonban az ellipszises pályájú üstökösök közül 16-an a Jupiter, 1 a Saturnus, 1 az Uranus és 3-an a Neptun pályája közelében haladtak és a nevezett bolygókhoz is eléggé közel jutottak, úgy hogy mintegy ezek fogták volna őket be; voltaképen tehát ezek az üstökösök is parabolás pályán mozogtak; általában tehát az üstökösök eredetileg nem volnának a naprendszer

tagjai, az ellipszises pályájúak csak quasi bevándoroltak lennének.

Ámde ezen feltevés ellen szól mindenekelőtt az a körülmény, hogy kevés a hyperbolás pálya; tekintettel a Naprendszer saját mozgására (mely spektroszkópos vizsgálatok szerint $18.6-29.2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$) sokkal többnek kellene lenni. Másrészt, ha az üstökösök tényleg a Naprendszeren kívül vannak, többnek kellett volna a Lant-csillagzat (az Apex jelenlegi helye) felől jönnie, mint az ellenkező oldalról, a mi szintén nincs így. BOHLIN más irányú vizsgálódásai alapján a priori valószínűnek mondja, hogy a Naprendszer oly égi testek rendszeréhez tartozik, melyeknek közös mozgásuk van és akkor természetesen az üstökösökre nézve legegyszerűbb annak feltevése, hogy ők is ezen csillagcsoportba valók.

Így aztán magában érthetővé válik, hogy a Nap közelében időről-időre megjelennek, még pedig parabolás pályán. Mert hiszen az jellemzi a parabolát, hogy benne igen nagy (— végtelen —) távolságban a relatív mozgás elenyésző és ezt a feltevést éppen az a körülmény elégíti ki, hogy annak a csillagcsoportnak tagjai, melyhez Naprendszerünk és feltevésünk szerint az üstökösök is tartoznak, egymásközt relative nyugalomban vannak.

Hasonló eredményre, t. i. hogy a parabolában mozgó üstökösök is a Naprendszer tagjai, jut HERZ N. is a Valentiner-féle «Handwörterbuch der Astronomie»-ban.

Itt még azt akarom BOHLIN cikkéből kiemelni, hogy ő az üstökös-rendszereket tárgyalva (mikor t. i. több üstökös majdnem azonos pályán mozog, ismert pl. a KREUTZ-féle rendszer: 1668, 1843., 1880., 1882. és 1887-iki üstökösök), azt mondja: hogy olyan két üstökös is, melyek közül az egyiknek direkt, másiknak retrográd a mozgása, mégis közös eredetű lehet, mert ehhez elegendő, ha a két részre nézve a Naptól igen nagy távolságban elenyészően csekély iránykülönbséget veszünk fel.

STRÖMGRENnek előadására — mint kijelentette — az azóta

meghalt SCHIAPARELLINEK a «Bulletin astronomique»-ben megjelent értekezése «Orbites cométaires, courants cosmiques, météorites» adott alkalmat, illetve főleg az a körülmény, hogy SCHIAPARELLI nem említi FAYET G. párizsi csillagász munkálatait, melyek pedig, mint látni fogjuk, e kérdésre nézve elsőrendűek és melyekre ép azért tér ki STRÖMGREN.

Ez utóbbi is abból indul ki: milyen az üstökösök pályáinak alakja? ellipszises, parabolás vagy hyperbolás-e? Ha valamenynyí üstökös hyperbolás pályán közelednék a Nap felé, akkor tisztában volnánk azzal, hogy a Nap-rendszerbe kívülről kerültek. Ha azonban az ellenkező állana vagy legalább majdnem az ellenkező eset, hogy t. i. — a mint az az üstökösök pályáinak futólagos áttekintéséből kitűnik — a legtöbb üstökös pályája parabolás és csak kevés a hyperbolás: abból még távolról sem következnek az, hogy az üstökösök nagyjában a Naprendszerhez tartoznak és csak néhány jött be kívülről, hanem legfeljebb csak az, hogy az eredetileg hyperbolás pálya excentricitását és így magát a pályát is a nagy bolygók okozta perturbációk módosították.

Tényleg ki is mutatta SCHIAPARELLI, hogy túlnyomólag parabolás pályák esetén nagy annak a valószínűsége, hogy a legtöbb üstökös eredetileg hyperbolás pályán közeledett a Naprendszerhez. Ha aztán az ilyen hyperbolás pályán közeledő üstökös továbbra is hyperbolán halad, akkor el kellene hagynia a Naprendszert, míg azoknak az üstökösöknek, melyeknek pályája ellipszissé vált, a Naprendszerben kell maradniok és idővel mind gyakrabban észleltetniök. Feltéve tehát, hogy az üstökösök tényleg gyengén hyperbolás pályán jönnek be a Naprendszerbe, elegendően hosszú idő múltán oda kellene jutnunk, hogy nagyszámú, a parabolához közel álló ellipszises pálya mellett néhány gyengén hyperbolás pálya is legyen, ezt az üstökös-pályák jegyzéke *látszólag* meg is erősíti.

Az üstökösök kozmogoniai helyzetét tehát pályáik *excentricitása* dönti el. Természetesen azonban nem az az excentricitás, melyet a perihelium közelében történt észleletekből

számítunk ki — tehát a periheliumnak megfelelő exczentricitás. Mert csak gondoljuk meg, hogy különösen abban az esetben, ha a számított pálya közel parabolás — pedig ez a szabály — a *valódi pályáról* tulajdonképen még semmit sem tudunk, mert a nagy bolygók okozta perturbációk igen könnyen változtatják át a csak épen hyperbolás exczentricitást gyengén ellipszissé és fordítva. Szükséges ennél fogva, hogy ezeket a perturbációkat számítsuk és így az üstökösök eredeti pályáit határozzuk meg.

Az első, ki ily célból visszafelé számított parabolás pályájú üstökösöt THRAEN volt¹; az 1886 II. üstökösre ugyanis az észleletek alapján hyperbolát kapott $e = 1.0002286 \pm 0.0000044$; a Saturnus és Jupiter perturbációinak számítása azonban a következő értékeket szolgáltatotta:

1885 decz. 8-án 1.000229, 1883 ápr. 23-án 1.000052, 1884 aug. 15-én 1.000177, 1882 okt. 5-én 1.000002, a miből THRAEN helyesen következteti, hogy kellően visszafelé számítva, e végre is < 1 lesz.

Maga STRÖMGREN az 1890 II. üstökösnél számította visszafelé a perturbációk befolyását. Ez alkalommal jött arra a gondolatra, hogy a pályaelemeket a Nap-rendszer közös súlypontjára kell vonatkoztatni és vezette be az üstökösök pályaszámításába is az «oszkuláló elemeket, oszkuláló exczentricitást, oszkuláló keringési időt», a mint azt különben SCHIAPARELLI említett értekezésében bőven tárgyalja és világosan kifejtette. A közös súlypontra vonatkoztatott pályaelemek ezen (1890 II.) üstökösnél, melynek periheliumos exczentricitása 1.0004103 ± 0.0000193 volt, következő eredményre vezettek: 1887 febr. 1-én 1.00025; 1886 aug. 25-én 1.00024; 1886 márcz. 18-án 1.00021; 1885 okt. 9-én 1.00018; 1885 máj. 2-án 1.00016; 1884 nov. 23-án 1.00014; 1884 jul. 16-án 1.00013; 1884 január 8-án 1.00012; miből STRÖMGREN azt következtette, hogy ennek az

¹ Periodikusnak felismert üstökösöknél természetesen és tudvalevőleg már régen számították a perturbációkat.

üstökösnek az exczentricitása valamivel az egységen felül levő érték felé konvergál, tehát a pálya hyperbolikus marad.

FAYET 1900-ban publikálta (Bulletin astronomique) az 1892 II. üstökösre vonatkozó hasonló vizsgálatait, melyek szerint ennek az üstökösnek 1.000345 periheliumos exczentricitása végre is az egység alá süllyed.

Azonban ez az eljárás — hogy t. i. így az egyes nagy bolygók okozta specziális perturbációkat vesszük tekintetbe és számítjuk őket numerikus integrációval — nem biztosította azt az eredményt, hogy végre is elérjük a valóban eredeti exczentricitást. Mert végre is határtalanul nem lehet vissza-felé számítani, — parabola és hyperbola esetén pedig ez kel-lene — fel kell tehát állítani legalább a közel parabolás pá-lyákra nézve általános képleteket. Mialatt STRÖMGREN ezeket kereste, FABRY (az 1894-iki Comptes Rendusben) kimutatta, hogy az 1890 II. üstökös is eredetileg ellipszisben mozgott.

STRÖMGRENnek aztán sikerült a közel parabolás pályákra nézve az általános perturbációkra a képleteket felállítani. Mód-szere a következő: Mint ismeretes a *valódi anomália* és az *idő* közt a parabolánál fennáll a

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}$$

összefüggés, hol v az anomália, T a perihelium ideje, q a periheliumbeli távolság és k a Gauss-féle állandó. $\cot \frac{v}{2}$ szerint feloldva az egyenletet és $\frac{\sqrt{2q}}{\sqrt[3]{6k(t-T)}}$ helyébe y -t írva, nyerjük:

$$\cot \frac{v}{2} = y + y^3 + y^5 + \frac{2}{3} y^7 - \frac{2}{3} y^{11} \dots$$

A valódi anomália más függvényeire hasonló sorokat kapunk, vagyis v függvényei $\frac{1}{(t-T)^{\frac{3}{2}}}$ hatványai szerint lesznek sorba fejthetők.

Ha már most a perturbációs függvényt úgy, mint azt vala-

mely külső bolygónak egy belső bolygótól való háborgatásánál tesszük, $\frac{r_1}{r}$ hatványai szerint — hol r_1 a perturbáló, r pedig az üstökös radius vectora — sorba fejtjük, a következő alakra jutunk:

$$R = \sum_{n,i} \frac{\cos \frac{i\mu_1 t + i\varepsilon_1}{(t-T)^{\frac{n}{3}}}}{\sin \frac{i\mu_1 t + i\varepsilon_1}{(t-T)^{\frac{n}{3}}}},$$

hol a szokott jelölésben μ_1 a perturbáló bolygó közép mozgása, ε_1 pedig epochájának középhosszúsága.

Az elsőfokú perturbációk kérdésének megoldása ezek után két részből fog állani, 1. a fenti perturbációs függvénynek az elemek szerinti parciális differenciációjából és 2. az idő szerinti integrálásból. Az integrálisok alakja lesz:

$$\int \frac{\cos \frac{i\mu_1 t + i\varepsilon_1}{(t-T)^{\frac{n}{3}}}}{\sin \frac{i\mu_1 t + i\varepsilon_1}{(t-T)^{\frac{n}{3}}}} dt;$$

ezek pedig gammafüggvényekre vezetnek.

Az egész módszer attól függ, hogy az integrálás olyan időben kezdődjék, a mikor az üstökös még nagyon messze van a perturbáló bolygótól, tehát r jóval nagyobb mint r_1 . Az észlelésnek $t = t_0$ időpontjáig pedig a speciális perturbációkat kell visszafelé számítani.

Közben azonban sikerült STRÖMGRENNEK oly egyszerű tételt találnia, melynek segélyével a t_0 időpont előtti perturbációk felső határát tudta megállapítani. Ezen alapon már most újra számítva az 1890 II. üstökös eredeti pályáját, a következő eredményekre jutott: 1. a perihelium idejére számított $e = 1.0004103 \pm 0.0000193$; 2. ez az érték 1884 január 8-án 0-kor a Jupiter és Saturnus perturbációi folytán, a tömegek magasabb hatványait is tekintetbe véve, 0.9998502-re süllyed, e mellett $\frac{1}{a} = + 0.0000787$, a pálya tehát határozottan ellipszises; 3. Jupiterre vonatkozólag 1878 április 29-ig és Saturnusra vonatkozólag 1875 április 15-ig folytatott perturbáció-számítások $\frac{1}{a}$ értékét csak 0.0000070-lal kisebbitik; 4. a t_0 epochát meg-

előző idő előttie a fentemlített tétel szerint a perturbációk legfeljebb $\Delta \left(\frac{1}{a} \right) = -0.0000250$ értékűek lehetnek, miáltal az 1890 II. üstökösről be van bizonyítva, hogy eredeti pályája ellipszis.

STRÖMGRENTől függetlenül foglalkozott ezzel a kérdéssel FAYET: «Recherches concernant les excentricités des comètes» (1906) című munkájában, melyben a parabolás pályák általános perturbációit állapítja meg és számos üstökösre nézve közelítő számításokat közöl.

FAYET módszere $\frac{r_1}{r}$ -től független, tehát akkor is érvényes, ha $r_1 > r$. A számításokat azonban FAYET csak a perturbáló tömeg első hatványára végezte el és perturbáló tömegként csak Jupitert vette tekintetbe, ezért eredményei természetesen csak közelítőek. De ezt megértjük, ha meggondoljuk, hogy FAYET több mint 100 üstökösre vonatkozólag számította a perturbációkat.

A tekintetbe vett üstökösök kétharmad részének pályája sokkal bizonytalanabban van meghatározva, semhogy a visszafelé való számítás alapjául szolgálhatna; a némileg megbízható pályájú üstökösök közül FAYET csak a következőkre nem mutathatta ki, hogy eredetileg ellipsziszben mozogtak; ezek az 1844 III., 1863 VI., 1890 II., 1898 VII. és 1899 I.; ez az öt maradna tehát eredetileg hyperbolás, a többi (számított) mind ellipszises. De az 1890 II. az előbb elmondottak szerint már kiesik, az 1844 III. üstökösről FAYET kimutatja, hogy az eredeti pályaszámítás hibás volt, az újraszámítás pedig ellipszist eredményezett. Az 1863 VI., 1898 VII. és 1899 I.-re FAYET aztán kiszámítja legalább az elsőrendű speciális perturbációkat és ezek számbavételével csak az 1898 VII. üstökösre nyer az egységnél nagyobb excentricitást, még pedig olyant, melynél a közepes hiba határozottan kisebb mint az excentricitásnak az egységet meghaladó többlete; t. i. $e = 1.0000893 \pm 0.0000165$. A második még megmaradó két üstökösre, t. i. az 1863 VI. és 1899 I.-re nézve a hyperbola — a pályaszámítás bizonytalan-

sága folytán — szintén illuzóriusnak tekinthető. FÁBRY, STRÖMGREN szerint még más néhány üstökösre nézve is hasonló eredményre jut, de számításait nem közölte.

STRÖMGREN legutóbb Kopenhágában újra belement ilyenmő vizsgálataiba és néhány különösen kritikus esetre vonatkozólag a következő eredményeket közölte előadásában.

1886 II. (a THRAEN-től számított) üstökösnek periheliumbeli excentricitása = 1.0002286; a szigorú számítás határozottan ellipszises pályát ad. 1897 I. üstökös periheliumbeli excentricitása = 1.0009279; a szigorú számítás szerint szintén ellipszist eredményez, a mi azért fontos eredmény, mert FAYET-nak az A. N.-ben közölt számításába hiba csúszott be.¹ 1898 VII. üstökösnél, melynek periheliumbeli excentricitása 1.0010336, FAYET szerint pedig eredetileg 1.0000893, a szigorú számítás oly excentricitást eredményez, mely az egységénél, a jelzett hibánál kisebb mennyiségnél nagyobb és így ez a FAYET szerint még hyperbolás pálya is kiválik.

STRÖMGREN előadása befejezése előtt azt mondja: «A mit elmondtam, annak semmi köze hypotézisekhez, készakarva kerültem az olyan munkák említését, melyek az üstökösök kozmogoniájáról feltevésekkel élnek. Én oly számítási eredményeket közöltem és beszéltem itt meg, melyek biztos észleleti alapokon nyugosznak; ezekhez a számbeli eredményekhez — legalább egyelőre — semmit sem akarok hozzátenni, beszéljenek a számok maguk. A FAYET, FÁBRY és a magamvégezte munkák eredménye ebben a tételben csúcsosodik ki. Ha a Newton-féle gravitáció befolyását szigorúan számításba vesszük és semmi-féle más erőt nem veszünk hozzá, valószínűleg *valamennyi* ezidőszerinti üstökőspályánál ellipszises excentricitásra jutunk.»

A nélkül, hogy STRÖMGREN okfejtését és levezetését² legkevésbbé is meg akarnám támadni vagy eredményeit kétségbe-

¹ $\omega = 172^{\circ}18'59''49$ az ott közölt $127^{\circ}18'59''49$ helyett.

² STRÖMGREN régebbi értekezése az Astr. Nachr. 3605. (1900), 4033, 4034. és 4058 (1905) számaiban jelentek meg.

vonni, egy-két megjegyzést mégsem nyomhatok el. Tudvalevőleg az üstökösök pályáinak végre is csak aránylag igen kicsiny részeit észleljük és az esetek túlnyomó részében épen nem tudjuk, vajjon a periheliumtól már eléggé messze fekvő helyek nem módosítanak-e különösen a határozottan parabolás pályáknál annyira a számítás alapját képező periheliumos elemeket, hogy megváltozott értékei aztán a perturbációkra is eltérő és így az eredeti pályára nézve is más eredményt adnának. Emlékezzünk csak vissza, hogy BOHLIN nem tartja lehetetlennek, hogy két — a periheliumkor — ellentétes mozgású üstökös eredetileg azonos lehetett, oly nagy lehet az elegendően nagy távolságban fellépett kicsiny iránykülönbség befolyása. Vegyük számba, milyen nehéz az üstökösök pontos észlelése, a min még a fotográfia sem segít teljesen és megértjük a pályaszámítások bizonytalanságát. Láttuk, hogy FAYET az üstökös-pályáknak csak vagy egy harmadrészét használhatta fel számításaihoz és STRÖMGREN is minduntalan utal arra, hogy a periheliumos elemeknek megbízhatóknak kell lenniök. Egyik előző értekezésében kimondja azt is, hogy oly esetekben, mikor a perihelium közelében az oszkuláló excenricitás eltérése az egységtől nagy, a visszafelé számított perturbációk nem érnek el olyan nagy értéket, hogy a kúpszelet nemét megváltoztassák. Véglegesen tehát ezek alapján még nem lehetne az üstökös-pályák ellipszises alakja mellett állást foglalni; maga STRÖMGREN is csak azt mondja, hogy valószínűleg az ezidőszerint is, mert üstökös-pályák ellipszisek. A mivel azonban STRÖMGREN befejezi előadását, azt már feltétlenül el kell fogadnunk. «A jövőre nézve az üstökös-pályák számítóit arra kérném, hogy mindazon esetekben, a mikor a perihelium excenricitása kellő biztossággal van számítva és eléggé közel áll az egységhez, maguk végezzék el a most jelzett elvek szerinti visszafelé számítást. Egyszer és mindenkorra meg kellene állapítani, hogy a pályaszámításnak e nélkül a többmunka nélkül kozmogoniai czélokra semmi értéke sincsen.»

Lakits Ferencz.

LENCSERENDSZEREK FŐPONTJAINAK ÉS FŐFELÜLETEINEK KISÉRLETI MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

A következőkben röviden össze kívánom állítani a lencserendszerek főpontjainak meghatározására vonatkozó fontosabb módszereket s azután ismertetni fogom azokat a vizsgálódásokat, a melyeket e téren részben SCHULLER ALAJOS dr. műegyetemi tanár úr, részben magam végeztem.

Mint ismeretes, főpontoknak nevezzük azon coniugált pontokat, a melyekre, mint kezdőpontokra nézve a tárgytávolság (t), a képtávolság (k) és fókusztaávolság (f) között az

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}$$

összefüggés áll fenn.

A főpontokon át a lencse¹ tengelyére merőleges síkokat fősíkoknak nevezzük. Rajtuk a nagyítás mértéke $+1$. Gyakorlati fontosságukat ezen tulajdonságuknak köszönhetik. Ugyanis bármely fénysugár úgy halad át a lencsén, hogy a belépő és kilépő sugarak meghosszabbítása a fősíkokat egymáshoz coniugált, azaz a lencse tengelyétől egyenlő távolságban levő pontokban metszi.

Fogadjuk el a továbbiakban a fősíkok ezen tulajdonságát definitióképen. Akkor azt találjuk, hogy csak kis nyílású optikai szerkezeteknél beszélhetünk fősíkokról. Nagyobb nyílású lencsénél ez a definitio általában olyan felületeket határoz

¹ A továbbiakban az általánosabb «lencserendszer» elnevezés helyett egyszerűen a «lencse» szót fogom használni.

meg, a melyeknek alakja többé-kevésbbé eltér a siktól. Azért további fejtegetéseinkben nem is fogunk fókuszokról beszélni, hanem főfelületekről.¹

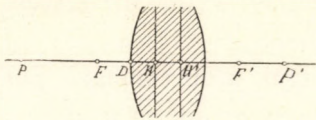
Valamely lencse főfelületeire nézve két dolog érdekel bennünket első sorban:

1. A főfelületek tengelymetszetének, azaz a szorosabb értelemben vett főpontoknak helye a lencséhez képest.

2. A főfelületek alakja.

Az alábbiakban ezeknek kísérleti meghatározásáról fogunk szólni.

A főpontok helyét egyszerűen megadja tetszésszerűen két coniugált pont helyének és a tárgy, meg a képtávolságnak, vagy a két gyújtópontnak és a gyújtótávolságnak az ismerete.



1. ábra.

Ezen elv alapján először GAUSS dolgozott ki mérési eljárást, a mely lényegében a következő:²

Lemérjük a két gyújtópontnak (F, F') s ha a gyújtótávolságot nem ismerjük, két coniugált pontnak (P, P') távolságát a lencse felületének egy megjelölt pontjától (D). Ezen adatok alapján a fókuszok távolsága:

$$h = FF' - 2f,$$

s az egyik főpontnak a lencse felületétől való távolsága:

$$DH = f - DF.$$

Ha f ismeretlen, akkor a P és P' coniugált pontpár segítségével meghatározhatjuk azt, kiindulva a fókuszpontokra vonatkoztatott lencseképletből,

$$PF \cdot P'F' = f^2:$$

$$f = \sqrt{(DP - DF)(DP' - DF')}$$

¹ Ez az elnevezés tudomásom szerint SCHULLER ALAJOS tanár úrtól származik.

² Részletesen leírja CORNU, Journal de Physique, 6., 276., 1877.

és így

$$h = FF' - 2 \sqrt{(DP - DF')(DP' - DF')}$$

és

$$DH = \sqrt{(DP - DF')(DP' - DF')} - DF.$$

Nyilvánvaló, hogy ez a módszer csekély pontosságot szolgáltat, részben, mert nagy távolságok különbségéből kell kis hosszúságokra következtetést vonni, részben, mert az adatok lemérése nem lehetséges nagy pontossággal.

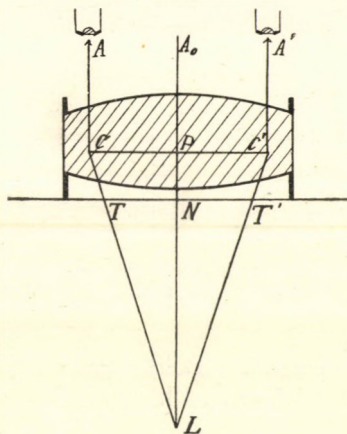
Sokkal pontosabb eredményt szolgáltat HARTMANN eljárása.¹ HARTMANN mikroszkóp eltolható asztalkájára finom üvegskálát erősít s erre helyezi a vizsgálandó lencsét. Centrálja s azután az asztalt eltolja a skála hosszirányában PC távolsággal. A mikroszkóppal a lencsén át nézve, az eltolást NT -nek találja. Minthogy a mikroszkóp az A_0 , A , A' irányban telecentrikus sugarakat kap, C a lencse alsó főfelületének egy pontja lesz, $PL = f$ pedig a PC sugarú övhöz tartozó gyújtótávolság. PC , NT és f ismeretével a lencse főfelületét pontról-pontra meghatározhatjuk. PC és NT helyett CC' -t és TT' -t használva, mint a rajzból kitűnik,

$$\frac{CC'}{TT'} = \frac{PL}{NL},$$

ebből

$$PN = \frac{CC' - NL}{CC'} \cdot f.$$

Hasonló elvet használ fel ABBÉ is focométerének ilyen célra való alkalmazásánál.² De míg HARTMANN a gyújtótávolság ismeretével



2. ábra.

¹ Zeitschrift für Instrumentenkunde 24., 40., 1904.

² CZAPSZKY: Zeitschrift für Instr. 12., 185., 1892.

retét feltételezi, addig ABBÉ két skála alkalmazásával egyúttal azt is megméri.

Eljárása röviden a következő:

A készülék eltolható asztalkájára (AA) helyezük a vizsgálandó lencsét. Czentráljuk és élesre állítjuk az egyik skálát, pl. az alsót (T). Azután az asztalkát eltoljuk annyira, hogy a mikroszkóp alá a lencsének az a része kerüljön, a melyen a főfelületet meg akarjuk határozni. Leolvassuk az asztal szélére karczott skálán az asztalka állását és a T skálának a mikroszkóp fonálkeresztjére eső osztályrészét. Majd ismét eltoljuk az asztalt annyira, hogy a lencsének az előbb beállítottához szimmetrikus pontja kerüljön a mikroszkóp alá. Legyen ekközben az asztalka eltolódása $S_1S_2 = S$, a skáláé pedig a mikroszkópon át nézve $T_1T_2 = T$.

Továbbá legyen $OK = D$, $OL = f$. Akkor az OS_1S_2 és OT_1T_2 háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{D}{f} = \frac{T}{S}.$$

Ugyanezt ismételve a t skálával, kapjuk, hogy

$$\frac{d}{f} = \frac{t}{s}.$$

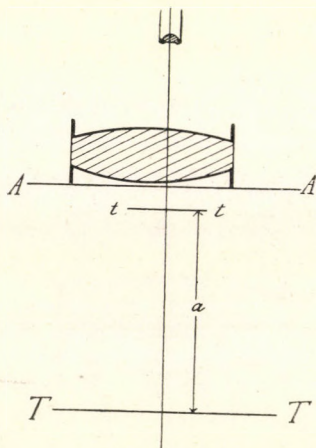
Ezekből

$$f = \frac{Dd}{\frac{T}{S} - \frac{t}{s}} = \frac{a}{\frac{T}{S} - \frac{t}{s}}$$

és

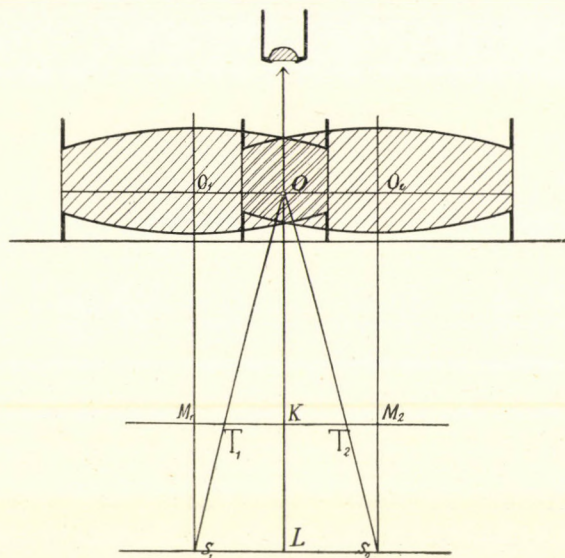
$$d = \frac{t}{s} \frac{a}{\frac{T}{S} - \frac{t}{s}}.$$

a jelenti a t és T skála egymástól való távolságát.



3. ábra.

Ezen eljárással tehát megkapjuk a felület egyes pontjait, de meglehetősen hosszasan mérgetés és számítás útján. S épúgy, mint HARTMANN módszerénél, külön kell elvégeznünk az egész eljárást mindegyik felületre; továbbá, itt is aránylag nagy távolságok különbségéből kell kis hosszúságokra következtetni.



4. ábra.

Közvetlenebb módszereket adott a fõpontok meghatározására SCHULLER ALAJOS dr. mûegyetemi tanár úr.¹ Ő felkeresi a lencse azon pontjait, a melyekben a kép összeesik a tárggyal. Ilyen pont kettõ van, szimmetrikus helyzetben a fõpontokhoz. Helyöket megkapjuk, ha az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

képletben a $k = -(t+h)$ helyettesítést végezzük. Rajzunkon $HH' = h$, $HQ = t$, $HF = f$ és $H'Q = k$.

A számítást elvégezve:

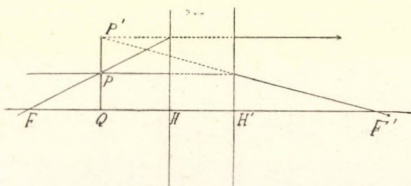
¹ A tanár úr engedelméből itt közölve először.

$$t_1 = -\frac{h}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + 4hf}$$

$$t_2 = -\frac{h}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + 4hf}.$$

Ezekből

$$t_2 = -(t_1 + h).$$



5. ábra.

Az utolsó egyenletből látható, hogy a keresett pontok szimmetrikusak a főpontokhoz; továbbá egybeesnek, ha a főpontok is egymásra kerülnek.

A kísérleti meghatározás történhetik úgy, hogy egy segéd-lencsével valamely távoli tárgy, pl. skála képét állítjuk elő s e képet kis nagyítású mikroszkópon át nézve, lehetőleg élesre állítjuk. Azután közbetéve a vizsgálandó lencsét, felkeressük azon két helyzetét, a melyekben a képet a mikroszkóp érintetlenül hagyásával ismét élesen látjuk. Az egészet optikai padra szerelve, megmérhetjük a két helyzet közötti távolságot. Legyen ez D . Akkor fenti képleteink alapján

$$D = t_1 - t_2 = \sqrt{h^2 + 4hf}.$$

Ha f -et ismertnek tételezzük fel, akkor h már kiszámítható:

$$h = \sqrt{4f^2 + D^2} - 2f.$$

Ez a képlet azt is mutatja, hogy f -nek elégséges közelítő ismerete. Mert

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial f} df &= -2df + \frac{4f}{\sqrt{4f^2 + D^2}} df \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{4f^2}}} - 1 \right) 2df. \end{aligned}$$

D általában jóval kisebb, mint f , azért az

$$\sqrt{1 + \frac{D^2}{4f^2}}$$

kifejezést binomiális sorba fejtve:

$$\frac{\partial h}{\partial f} df = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2f} \right)^2 + \dots - 1 \right] 2df.$$

Ha a magasabb rendű tagokat elhagyjuk:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial f} df = - \left(\frac{D}{2f} \right)^2 df,$$

azaz a gyújtótávolság lemerésénél elkövetett hibának csak kis törtrésze lép föl h képletében. Ez nem áll kis gyújtótávolságú, összetett lencserendszereknel, a hol a fők pontok rendesen távol vannak egymástól s így D meglehetősen nagy f -hez képest.

Ha $\frac{h}{f}$ kicsiny, akkor h közvetlenül lemérhető. Ugyanis $t = -\frac{h}{2}$ esetén

$$k = \frac{h}{2 + \frac{h}{f}},$$

azaz $\frac{h}{f}$ elhagyásával ezen helyzetben a kép és a tárgy egymástól való távolsága éppen h . Ha tehát megállapítottuk azt a két pontot, a melyekben a kép és a tárgy összeesik, ezek egyikéből $\frac{D}{2}$ -el eltoljuk a vizsgált lencsét. Akkor a virtuális tárgy éppen a főfelületek közti távolság felezőpontjában van. Hogy ismét képet kapjunk, a mikroszkópot el kell tolnunk h -val, vagyis éppen a keresett hosszúsággal. Ha e közben a lencse felületén levő port is élesre állítjuk, meghatározhatjuk a felezőpontnak a felülettől való távolságát.

Ez az eljárás akkor is használható, ha $\frac{h}{f}$ nem hanyagolható el, csakhog y akkor D felhasználásával ki kell küszöbölni f -et.

Legyen a $\frac{h}{2}$ pontban elhelyezett tárgy és képe közötti távolság d , a melyet lemértünk, akkor a fentiek alapján:

$$d = \frac{h}{2} + \frac{h}{2 + \frac{h}{f}}$$

és

$$D^2 = h^2 + 4hf.$$

Ez utóbbi egyenletből

$$\frac{D^2 - h^2}{h^2} \cdot \frac{h}{f} = 4,$$

s innen

$$\frac{h}{f} = \frac{4h^2}{D^2 - h^2}.$$

Ezt helyettesítve:

$$d = \frac{h}{2} + \frac{h}{2 + \frac{4h^2}{D^2 - h^2}}$$

$$d = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{D^2 - h^2}{D^2 + h^2} \right) = h \frac{D^2}{D^2 + h^2}.$$

Rendezve:

$$d(D^2 + h^2) = hD^2,$$

$$d \cdot h^2 - D^2 \cdot h + d \cdot D^2 = 0.$$

Ebből

$$h = \frac{D^2 \pm \sqrt{D^4 - 4D^2d^2}}{2d}.$$

Minthogy h nem lehet nagyobb D -nél, csak a $-$ jel veendő tekintetbe, s akkor:

$$h = \frac{D}{2d} (D - \sqrt{D^2 - 4d^2}).$$

Ha a fõpontokat a lencse különbözõ zónáira nézve akarjuk meghatározni, akkor a lencse közepét koronggal elfedve, megfelelő diafragma alkalmazásával csak a kérdéses zónákon jövõ sugarakból állítjuk elő a képet.

Ezen utóbbi, a tárgy és a kép összeesésén alapuló eljárások nagy előnye, hogy a h -val egyenlő rendű mennyiségek

(D és d) lemérését teszi szükségessé. Nagy hátránya azonban, hogy csak gyűjtő lencsénél alkalmazható. Ugyanis a

$$t = -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + 4hf}$$

kifejezés képzetes, ha $f < 0$, azaz szóró lencsék esetén. Szóró lencsénél tehát a tárgynak általában nincs olyan helyzete, a melyben képével összeesne. Kivétel az olyan lencse, a melyben $4f \leq h$. Ilyen lencsét kapunk, ha két szóró lencsét egy rendszerre egyesítünk úgy, hogy a két lencse egymástól való távolsága bizonyos értéknél nagyobb legyen. Legyen ugyanis a két lencse egymástól való távolsága L , gyűjtőtávolságuk f_1 illetőleg f_2 . Ha végtelen vékonyaknak tekintjük őket, akkor az egyesített rendszer fókuszjainak egymástól való távolsága

$$h = \frac{L^2}{f_1 + f_2 - L}$$

és az eredő gyűjtőtávolság:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - L}$$

Tárgy és kép összeeshetik, ha

$$4f \leq h,$$

azaz

$$4f_1 f_2 \leq L,$$

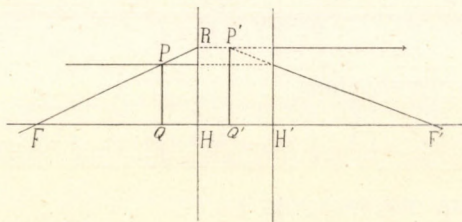
oly feltétel, a melylyel a gyakorlatban úgyszólván sohasem találkozunk.

Az eddig tárgyalt eljárásoknál a mérés folyamán a főfelületek helyzetén kívül még a lencse más meghatározói is tekintetbe jönnek, holott van a főfelületeknek olyan két karakterisztikus tulajdonsága, a mely teljesen függetlenül a lencse minden egyéb adatától meghatározza a főfelületeket. E két tulajdonság: a főfelületek egymásnak coniugáltjai s rajtuk a nagyítás mértéke $+1$.

SCHULLER tanár úr ezen az alapon construált egy másik módszert a fókuszok meghatározására.

Ez eljárás szerint a virtuális tárgyat a lencse egyik főfelületére hozzuk; akkor képe a másik főfelületen van. A mikroszkópban élesre állítjuk s azután a lencsét elvéve eltoljuk a mikroszkópot addig, a míg a virtuális tárgyat ismét élesen látjuk. Ez az eltolás a keresett távolság. Ha előzőleg a mikroszkópot a lencse felületére is beállítottuk, akkor a fókuszok helyzetére nézve minden adatunk megvan.

A virtuális tárgyat a főfelületre úgy hozzuk, hogy megkeressük azt a helyzetet, a melyben a nagyítás $+1$. Ebből a célból a mikroszkópot úgy állítjuk fel, hogy a virtuális tárgy két megjelölt pontja a mikroszkóp okulárja előtt elhelyezett skála két osztó vonalára essék. Azután közbetéve a kérdéses lencsét, megkeressük a lencse és a mikroszkóp azon helyzetét, a melyben a két megjelölt pont képe ugyanott látszik.



6. ábra.

Ezen módszer szerint méréseket végezve, tapasztaltam, hogy a beállítás bizonytalan; egyrészt, mert egyszerre két rendszert kell mozgatnunk: a mérendő lencsét és a mikroszkópot, másrészt, mert a főfelületek közelében a nagyítás aránylag kevésbé változik a tárgy elmozdításával. Ugyanis a nagyítás, mint FPQ és FRH háromszögek hasonlóságából következik:

$$N = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{f}{f-t},$$

s a nagyítás változása, ha a tárgyat dt -vel elmozdítjuk:

$$dN = \frac{\partial N}{\partial t} dt = \frac{f}{(f-t)^2} dt = \frac{1}{f} \frac{dt}{\left(1 - \frac{t}{f}\right)^2}.$$

t kicsiny, tehát $\frac{t}{f}$ elhagyható s így:

$$dN = \frac{dt}{f},$$

a mi mutatja, hogy a beállítás különösen nagyobb gyújtótávolságú lencsénél kevésbé érzékeny. Végül az érzékenység növelése végett a virtuális tárgyat lehetőleg nagynak kell választanunk s ennek következtében nem lehet keskeny fénynyalábbal dolgozni.

Ezeket tekintetbe véve, módot kerestem a pontosabb és egyszerűbb beállításra. Kutatásom sikerrel járt; a következőkben ennek eredményét kívánom leírni.

Ha valamely tárgyat lencsén át nézünk és a lencsét a sugarak irányára merőlegesen elmozgatjuk, akkor a tárgy is elmozdulni látszik, kivéve azt az esetet, a mikor a tárgy az egyik főfelületen van. Ez a tűnemény nagyon alkalmas a virtuális tárgynak a főfelületre hozására, még pedig első sorban azért, mert egyetlen pont képének a megfigyelése elegendő, tehát a kérdéses lencsén átmenő bármily keskeny fénynyaláb használható; másodsorban azért, mert szemünk elmozdulások iránt sokkal érzékenyebb, mint nagyságbeli különbségek iránt. A főfelületre hozás tehát ezen elv alapján egyszerűen úgy történhetik, hogy a kérdéses lencsét jobbra-balra tologatva, a virtuális tárgyat szolgáltató lencsét addig mozgatjuk, a míg a mikroszkópon át nézett kép helyzetét nem változtatja. Ekkor a mikroszkóppal a képet lehetőleg élesre állítjuk s azután a lencsét eltávolítva, a virtuális tárgyat ismét élesre állítjuk; a mikroszkóp csövének e két helyzet közötti magasságkülönbsége a főtávolságok távolsága.

Amint látjuk tehát, ez alapon a mérés úgy elvben, mint kivitelében nagyon egyszerű.

Vessünk most egy pillantást az itt fellépő geometriai viszonyokra.

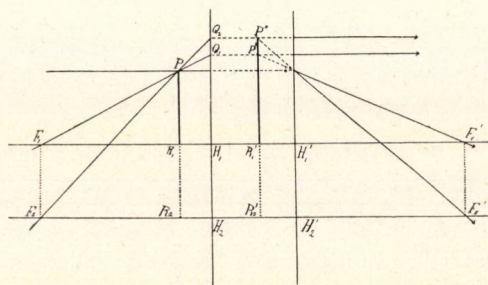
Vegyük fel először, hogy a főfelületek síkok. Legyen P a

megfigyelt pont, P' a képe. Mozdítsuk el a lencsét $dT = F_1F'_2$ -vel. Akkor P' P'' -be kerül. Legyen $PR_1 = T$, $P'R'_1 = K$; akkor $P''R'_2 = K + dK$ és $PP'' = dK - dT = ds$. Ez utóbbi lesz a mikroszkópon át megfigyelhető elmozdulás. Keressük a P pont azon helyzetét, a melyben

$$ds = P'P'' = 0,$$

azaz

$$\frac{dK}{dT} = 1.$$



7. ábra.

Mint hogy a mikroszkóp telecentrikus sugarakat kap, a tengelyén átmenő sugarak a fókuszából jönnek. Tehát a szokott jelöléseket használva:

$$\frac{P'R'_1}{PR_1} = \frac{f}{f-t} = \frac{K}{T},$$

mert

$$F_1H_1Q_1 \sim F_1R_1P,$$

Épúgy

$$F_2H_2Q_2 \sim F_2R_2P,$$

tehát

$$\frac{P''R'_2}{PR_2} = \frac{f}{f-t} = \frac{K+dK}{T+dT}.$$

Ezt a két egyenletet egyesítve:

$$\frac{K+dK}{T+dT} = \frac{K}{T},$$

vagy

$$\frac{K+dK}{K} = \frac{T+dT}{T},$$

Ebből

$$\frac{dK}{K} = \frac{dT}{T},$$

vagy

$$\frac{dK}{dT} = \frac{K}{T} = \frac{f}{f-t}.$$

Szükségünk van a lencse azon helyzetére, a melyben

$$\frac{dK}{dT} = 1.$$

A fenti képlet értelmében ez csak úgy állhat fenn, ha $t = 0$, vagyis a tárgy az egyik fősíkban van. Minden más esetben van elmozdulás. Vizsgáljuk ennek az irányát a fősíkok közelében. Legyen az elmozdulás ds ; akkor

$$\frac{ds}{dT} = \frac{dK - dT}{dT} = \frac{t}{f-t},$$

azaz $\frac{ds}{dT}$ t -vel egyező előjelű. Ez azt jelenti, hogy a kép nagysága növekszik t -vel, azaz P' távolodik a tengelytől, ha $t > 0$ és közeledik, ha $t < 0$. Helyezzük a vizsgált lencsét F' oldalával fölfelé a mikroszkóp alá s tekintetbe véve, hogy a mikroszkóp megfordítja a kép állását, alkalmazzuk az utóbb mondottakat a méréseknél szereplő viszonyokra. Akkor tapasztalni fogjuk, hogy ha a tárgy egy gyűjtő lencse főfelülete alatt van, akkor a mikroszkópban látott kép a lencsével egyező irányban mozog s ellenkező irányban, ha a tárgy a főfelület fölött foglal helyet. Szórólencse vizsgálatánál fordítva áll a dolog.

A beállítás pontosságára nézve felvilágosítást ad a

$$\frac{ds}{dT} = \frac{t}{f-t}$$

hányados. Első pillanatra csekélynek látszik a pontosság, mert a jobboldalon igen kicsiny tört áll. De, ha meggondoljuk, hogy a látótérben 0.2 mm elmozdulást már észreveszünk s ez 50-szeresen nagyító mikroszkóppal 0.004 mm tényleges elmozdulás-

nak felel meg, akkor látjuk, hogy $f = 100$ mm, $dT = 2$ mm esetén $t = 0.2$ mm pontossággal közelíthetjük meg a főfelületet. Ezen megközelítést azáltal fokozhatjuk, hogy egyszer alulról, másszor felülről közeledünk a főfelülethez s az így nyert két helyzet középértékét vesszük. Megjegyzendő, hogy a két érték ritkán különböző.

A két főfelület egymástól való távolságának lemérésében sokkal nagyobb a pontosság. Ugyanis az

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}$$

képletből

$$k = -t \frac{f}{f-t} = -t \frac{1}{1 - \frac{t}{f}} = -t \left(1 + \frac{t}{f} + \dots \right),$$

azaz t kis értékeinél a kép és a tárgy a megfelelő fókók ugyanazon oldalán van s számértékük csak igen kevésbé különbözik egymástól. Pl. az előbb felvett esetben:

$$|k| - |t| = \frac{t^2}{f} = \frac{0.01}{100} = 0.0001 \text{ mm,}$$

azaz a kép és a tárgy egymástól való távolsága ennyiben különbözik a fókók távolságától.

A leírtak alapján nagyon egyszerű valamely lencse fókóit meghatározni. A vizsgálandó lencsét mikroszkóp asztalkájára helyezzük és centráljuk. Az asztal alatt levő, emelhető lencse segítségével előállítjuk valamely világító pont képét. Azután az asztalkát állandóan tologatva, az alsó lencsét elmozgatjuk addig, a míg a látótérben a kép már nem mozdul. Ekkor a képet lehetőleg élesre állítjuk; azután a lencse felületét, majd a lencsét elvéve, ismét a virtuális tárgyat állítjuk be; a mikroszkóp e három helyzetét leolvassuk. Ez a három leolvasás adja a fókóknak a lencse felületéhez viszonyított helyzetét.

A függélyes-menti leolvasások egyszerűen a mikroszkóp cső-

vére karcsolt osztályzat segélyével történhetnek; ha ilyen nincs, akkor kathetométerrel. Világító pont helyett előnyös skálát használni; ennek vonalai közül kiválaszthatjuk azt, a melyeknek a látótérben legelőnyösebb a helyzete. A virtuális tárgy előállítására megfelel a mikroszkóp kondensora is, különösen, ha ez tokjában függélyes irányban elmozgatható. Ha nem, akkor a tárgy gyanánt szolgáló skálát vagy fénypontot mozgathatjuk helyette. Kíváncs, hogy az asztalka gyorsan mozoghasson; esetleg a mikrométercsavartól fel is szabadíthatjuk.

Ezen utolsó eljárásról szóló fejtegetés során feltételeztük, hogy a főfelületek síkok. E feltevés teljesen elegendő arra, hogy bármely lencsének tengelymenti főpontjait meghatározzuk, mert a főfelületeket igen nagy megközelítéssel síkoknak vehetjük azon a pár milliméternyi darabon, a mely szükséges a lencse tologatásához. Kérdés azonban, használható-e a módszer akkor, a mikor nem az optikai tengelyben levő főpontokat keressük olyan lencsénél, a melyeknél a főfelületek alakja erősebben eltér a siktól. Más szóval, alkalmazható-e ezen eljárás a főfelületek alakjának meghatározására.

Ki fogjuk mutatni, hogy eddig leirt alakjában nem használható; egy kis módosítással azonban igen.

Az eljárás matematikai alapja ugyanis a következő:

Keresendők azon felületek, a melyre nézve

$$\frac{dK}{dT} = 1.$$

Itt T és K — mint eddig is — valamely pontnak és képének a tengelytől való merőleges távolságát jelenti; a tárgy elmozdulása mindig a tengelyre merőlegesen történik.

A mint a rajzon is fel van tüntetve, ezen differenciálegyenlet nem a főfelületeket jelenti, de az általa ábrázolt felületek nagyon egyszerű összefüggésben állanak a főfelületekkel.

Jelentse HH , $H'H'$ a két főfelületet, FH , $F'H'$ azon két felületet, a melyek kielégítik differenciálegyenletünket. Legyen P a tárgy, P' a képe. P -t mozgatsuk el Q -ba; akkor P' elmoz-

háromszögben van, ott, a hol a nyalábnak középvonalától számított aberrációja a legkisebb. Legyen ennek a pontnak a távolsága az M ponttól f . Akkor a t , k , f hosszúságokra nézve áll az ismert $\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}$ képlet.¹

A mi céljainkra teljesen elegendő, ha a fókusz B pontba helyezzük. Akkor, minthogy $BPQ \sim BMO_1$:

$$\frac{MO_1}{PQ} = \frac{f}{f-t}.$$

De

$$MO_1 = dy + dx \operatorname{tg} \varepsilon;$$

továbbá kiindulásunk értelmében $PQ = P'Q' = dy$, tehát:

$$\frac{MO_1}{PQ} = \frac{dy + dx \operatorname{tg} \varepsilon}{dy} = 1 + \operatorname{tg} \varepsilon \frac{dx}{dy} = \frac{f}{f-t},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon \frac{dx}{dy} = \frac{f}{f-t} - 1 = \frac{t}{f-t}.$$

t kicsiny f -hez képest, tehát $\frac{t}{f-t}$ helyett $\frac{t}{f}$ -et írhatunk.

Akkor

$$\frac{dx}{dy} = \frac{t}{f \operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{t \cos \varepsilon}{f \sin \varepsilon}.$$

$$t \cos \varepsilon = \xi - x,$$

tehát

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\xi - x}{f \sin \varepsilon}.$$

A további számítás nagyon egyszerűvé válik, ha az AB darabtól eltekintünk. Ez az elhanyagolás a gyakorlatban előforduló legnagyobb nyílású lencseknél legfeljebb 0.1–0.2 mm hibát eredményez. Legyen tehát $A_1M = f$, s így $f \sin \varepsilon = y$; akkor

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\xi - x}{y}.$$

Ez az egyenlet nagyon könnyen integrálható. Ugyanis rendezve:

¹ A gömbi lencsékre nézve kifejtette REUSCH, Pogg. Annalen CXXX. 1867. 507.

$$y \frac{dx}{dy} + x = \xi$$

$$\frac{d}{dy}(xy) = \xi$$

$$xy = f\xi dy + c.$$

A ξ és y bizonyos számú összetartozó értékét megmértük. Állítsunk fel belőlük interpolációs formulát ξ -re nézve úgy, hogy az lehetőleg gyorsan convergáljon. Legyen a formula:

$$\xi = a_1 y + a_2 y^2 + \dots$$

Absolut tag nincs, mert a tengely mentén $\xi = 0$. Helyettesítve és integrálva:

$$xy = \frac{a_1}{2} y^2 + \frac{a_2}{3} y^3 + \dots + c$$

$y = 0$ esetén csak úgy állhat fenn az egyenlet, ha $c = 0$. y -al osztva:

$$x = \frac{a_1}{2} y + \frac{a_2}{3} y^2 + \dots,$$

azaz, ha ξ interpolációs formulájának együtthatóit rendre elosztjuk 2, 3, 4, ... számokkal, akkor az így keletkező sor x értékét adja.

Gömbi lencsénél rendesen elegendő a formula első két tagja, mert itt a főfelületek közel állanak a gömbhöz.

x ismeretével egyszerűen megkapjuk x' -t. Ugyanis, rajzunkból következik, hogy:

$$x' = \xi' - k.$$

A lencsék $\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}$ képletéből:

$$k = \frac{tf}{t-f} = -\frac{t}{1-\frac{t}{f}} = -t \left(1 + \frac{t}{f} + \dots \right)$$

tekintetbe véve $\frac{t}{f}$ kicsiny voltát.

$$t = \frac{\xi - x}{\cos \varepsilon} \text{ és } \cos \varepsilon = \frac{\sqrt{f^2 - y^2}}{f}$$

helyettesítésével :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\xi - x}{\cos \varepsilon} \left(1 + \frac{\xi - x}{f \cos \varepsilon} + \dots \right), \\ x' &= \xi' - \frac{\xi - x}{\cos \varepsilon} \left(1 + \frac{1}{f} \frac{\xi - x}{\cos \varepsilon} + \dots \right) \\ x' &= \xi' - \frac{\xi - x}{\sqrt{f^2 - y^2}} f \left(1 + \frac{\xi - x}{\sqrt{f^2 - y^2}} + \dots \right). \end{aligned}$$

$\frac{y}{f}$ általában kicsiny, tehát magasabb hatványai elhagyhatók s így lesz :

$$\frac{1}{\sqrt{f^2 - y^2}} = \frac{1}{f \sqrt{1 - \frac{y^2}{f^2}}} = \frac{1}{f} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{f^2} \right)$$

és

$$\begin{aligned} x' &= \xi' - (\xi - x) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{f^2} \right) \left[1 + \frac{\xi - x}{f} \right] \\ &= \xi' - (\xi - x) \left(1 + \frac{\xi - x}{f} + \frac{y^2}{2f^2} \right) \\ x' &= x + (\xi' - \xi) - \frac{\xi - x}{f} \left(\xi - x + \frac{y^2}{2f} \right). \end{aligned}$$

Az utolsó tag, a mely csak correctióként szerepel, f -nek csak közelítő ismeretét tételezi fel. Kisebb nyílású lencsénél egészen el is hagyható.

A főpontok egymástól való távolsága az y öv mentén :

$$\begin{aligned} h &= MM' = HH' + x - x' \\ &= h_0 + x - x' \\ h &= h_0 - (\xi' - \xi) + \frac{\xi - x}{f} \left(\xi - x + \frac{y^2}{2f} \right). \end{aligned}$$

Az utolsó tagra itt is az előbbi megjegyzés érvényes. Ha elhagyjuk, akkor h egyszerűen a P és P' pontok lemért magasságkülönbségével egyenlő.

A mérési eljárás tehát röviden összefoglalva a következő :

Meghatározunk FH és $F'H'$ felületeken bizonyos számú

pontot. Interpolációs formulát keresünk ξ -re s ennek együtt-hatóit rendre elosztva 2, 3, ⁴4, ...-el, megkapjuk x formuláját. Ebből kiszámítható x' és h .

Méréseimet az ABBÉ-ZEISS-féle focométeren végeztem. Asztala 8 cm-rel eltolható és 10 cm hosszú, 1.5 cm széles réssel van ellátva. A mikroszkóp magasságát két skálán olvashatjuk le; az egyik 1 mm-es, a másik 0.01 mm-es beosztású. A virtuális tárgyat a kondensorlencse foglalatába tett kb. 2 cm gyújtótávolságú lencse szolgáltatta az asztalka lapja alatt 10.5 cm re fekvő üvegskáláról. A virtuális tárgy helyét azáltal változtattam, hogy a lencsét tartalmazó kondensorfoglalatot le s fel csúsztattam hüvelyében. Megvilágításra Na-fényt használtam, a melyet a skála alá helyezett tükörrel irányítottam. 60-szoros nagyítású mikroszkópot használtam, az oculár előtt 0.1 mm-es skálával. A skála czélszerűbb a fonalkeresztnél, mert a vizsgálót függetleníti a képnek a látómezőben a vizsgált lencse szélei okozta nagyobb eltolódásoktól.

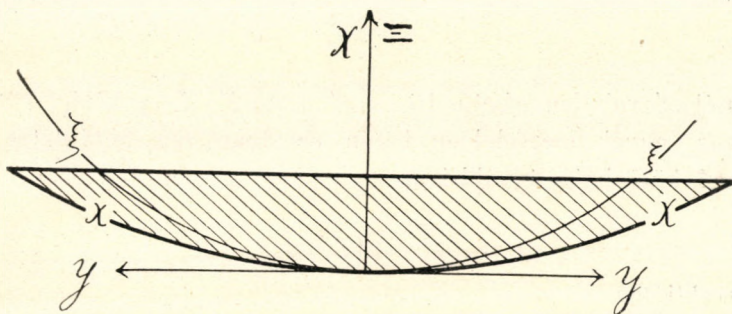
A kérdéses lencsét az asztalka kivágására helyeztem, úgy hogy a résből egy darab szabadon maradjon s a mikroszkóppal ccentriroztam. A főpontok meghatározásánál először az alsó lencse mozgatásával a tárgyat a főfelületre, illetőleg a *HF* segédfelületre hoztam s a mikroszkóppal meghatároztam a skálakép és a lencsefelület magasságát. Azután az asztalkát a lencse elmozdítása nélkül elhúztam addig, a míg a rés szabad része került a mikroszkóp alá; ekkor a virtuális tárgy magasságát mértem le. Ezt a művelet a lencse tengelypontján kezdve, megismételtem 5 mm-es intervallumokban. Mérés közben a lencse megfelelő helyére 2 mm-es rést helyeztem. A vizsgált pontnak a középponttól való távolságát az asztalka szélén levő skálán olvastam le.

Megvizsgáltam több különböző típusú lencse főfelületeit. Álljanak itt példaképen két síkdomború lencsének az adatai. Az ilyen lencsénél az egyik főfelületet maga a gömbfelület, tehát módunkban van ellenőrizni a mérés eredményét.

Az első táblázat olyan síkdomború lencse adatait tartal-

mazza, a mely gömbölyű felületével volt a tárgy felé fordítva, tehát itt az x mennyiségek közvetlen mérés útján is megállapíthatók.

A táblázat első sorában a centrumtól való távolság van feltüntetve. A második sor a lemért ξ koordinátákat tartalmazza; a harmadik sorban ξ -nek az interpolációs képlet-adta értékei vannak. A negyedik sor x lemért, az ötödik sor x szá-



9. ábra.

mitott értékeit mutatja. Végül a 6. és 7. sor ξ illetőleg x számított és lemért értékei közt mutatkozó eltérést tünteti elő.

Az interpolációs képletek:

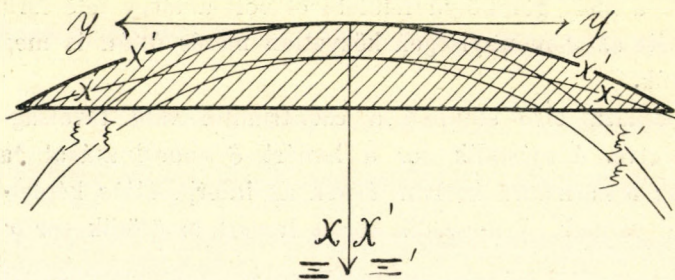
$$\xi = 0.09y + 0.018y^2$$

$$x = 0.05y + 0.006y^2.$$

y	0	5	10	15	20	25	30	35
ξ (mért)	—0.1	0.9	2.6	5.3	8.9	13.2	18.9	
ξ (számított)	0	0.9	2.7	5.3	9.0	13.4	18.9	
x (mért)	0.1	0.6	1.2	2.2	3.3	4.8	6.8	8.9
x (számított)	0	0.4	1.1	2.0	3.3	4.8	6.8	9.0
$\partial\xi$	0.1	0	0.1	0	0.1	0.2	0	
∂x	—0.1	—0.2	—0.1	—0.2	0	0.0	0	0.1

A mint látjuk, a mérési hiba határain belül (0.2 mm) elég jó az egyezés x számított és lemért értékei közt.

A másik lencsét sík felével fordítottam a tárgy felé, tehát



10. ábra.

ennél x' volt lemérhető. Itt az $x' = x + \xi' - \xi + \eta$ képlet szükséges, ennek megfelelően külön rovatban van feltüntetve a $\xi' - \xi$ különbség, továbbá az

$$\eta = -\frac{\xi - x}{f} \left(\xi - x + \frac{y^2}{2f} \right)$$

korrekciótag.

y	0	5	10	15	20	25	30	35
ξ (mért)	0	0.2	1.2	3.1	5	7.1	10.3	13.8
ξ'	0	0.3	1.4	3.8	5.7	7.9	12	16.7
ξ (számított)	0	0.5	1.4	2.9	4.9	7.4	10.3	13.8
x (számított)	0	0.2	0.5	1	1.8	2.6	3.7	4.8
$\xi' - \xi$	0	0.1	0.2	0.7	0.7	0.8	1.7	2.9
η					-0.1	-0.1	-0.3	-0.5
x' (számított)	0	0.3	0.7	1.7	2.4	3.3	5.1	7
x' (mért)	0	0.2	0.7	1.5	2.3	3.4	5.2	7.1
$\delta\xi$	0	0.2	0.2	-0.2	-0.1	0.3	0	0
$\delta x'$	0	0.1	0	0.2	0.1	-0.1	-0.1	-0.1

Az interpolációs formulák:

$$\xi = 0.044y + 0.01y^2$$

$$x = 0.022y + 0.0033y^2.$$

A mint látjuk, itt az egyezés még jobb, mint az előző táblázatban, habár ξ erősebb ingadozást mutat. A jobb egyezést x' ellenőrző lemérésének nagyobb pontossága magyarázza, a

mely itt a többi adatokkal együtt volt meghatározható, míg az első esetben külön kellett lemérni. $\delta\epsilon$ erős ingadozását hihetőleg a lenese csiszolásának hibái okozzák.

A leírt módszereket áttekintve, azt találjuk, hogy az utoljára tárgyalt eljárás míg egyrésztől gyorsan és egyszerűen kivihető bármely lencsénél és úgyszólván semmi számítást sem kíván, másrésztől pontosságra nézve vetekedik bármely eljárással, a míg csakis a tengelymenti főpontok meghatározásáról van szó. A főfelületek meghatározására nézve talán nagyobb pontosságot szolgáltat HARTMANN és ABBÉ módszere, de hasonlíthatatlanul több fáradság után. Nagy előnyei mindegyik eljárás fölött: gyorsan elvégezhető, nem kívánja a gyújtótávolság ismeretét és végül, hogy egy fénypont megfigyelése elegendő.

Ujj Gyula.

A Matematikai és Physikai Társulat tizennyolczadik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 19-én kibocsájtott meghívójára a Matematikai és Physikai Társulat XVIII. rendes közgyűlését f. évi május hó 1-én tartotta meg. A kitett névsor több vendégen kívül a következő tagok részvételét mutatja ki:

Anderkó Aurél, Bálint Elemér, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Beke Manó, Benda Jenő, Bozóky Endre, Böröczky Gyula, Csorba György (Miskolcz), Egerváry Jenő, br. Eötvös Loránd, Faragó Andor, Fekete Mihály, Fröhlich Izidor, Fröhlich Károly, Grosschmid Lajos, Hanauer Jenő, Kármán Ferencz, Kelemen Ignác, Klein Magda, Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Koschowitz Gyula, Kovács János, König Dénes, König Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lenkei Lehel, Lévy Ede, Lukács Ferencz, Mikola Sándor, Obláth Richárd, Pécsi Albert, Rados Gusztáv, Rados Ignác, Raffmann Jákó, Riesz Frigyes, Riesz Marczel, Róna Zsigmond, Rucsinszki Lajos, Sárközy Pál, Selényi Pál, Sós Ernő, Steiner Lajos, Suták József, Szabó Gábor, Szabó Péter, Szekeres Kálmán, Szűcs Adolf, Terlanday Emil, Tolnai Jenő, Tötössy Béla, Wodetzky József, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1911-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

Báró Eötvös Loránd elnök megnyitja a közgyűlést és üdvözli néhány szívélyes szóval a nagy számban megjelent tagokat.

A mult évi közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jelen ülés jegyzőkönyvének hitelesítésére Bozóky Endre és Ruicsinszki Lajos tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

A Matematikai és Fizikai Társulat tizenkilenczedik éve történetírójának munkája nagyon meg volna könnyítve, ha nagyobbkörű feladat felé fordulva általánosabban a magyar matematikai élet megnyilvánulását volna szabad festenie. Ekkor maga helyett hivatott tekintélyeket szólaltathatna meg, a kiket a Bolyai-díj másodízben való odaitélése társaink körébe hozott és a kik a maguk részéről is elismerték, a mit Társulatunk több illetékes tagja, nem ugyan társulati ügyek intézésekor, hanem azokon kívül eső alkalmakkor jóleső örömmel megállapított, hogy ime nálunk is szokatlan élénk és termékeny, nagy országnak is dicséretére való matematikai élet pezsdül.

Hogy ebből Társulatunk kétszeresen is kiveszi a maga részét, természetes. Büszkén mutathat rá tanulóversenyeinkre, melyekkel a jövőről gondoskodván, magához édesgeti a fiatal, életpályája megválasztásában talán még némileg ingadozó nemzedéket. Ezekben izleli meg talán először az önálló gondolat édes örömét és ezért, úgy látszik, nem csupán a díjnak nyertesait nyerjük meg, hanem még azokat is, a kik a célhoz közel jártak.

Egynehány év, és újra megjelennek körünkben, mint önálló, ügyes kutatók, a kik bizonyára a Társulat iránti hálából is szolgáltatják előadásaink anyagának javát. A zajos külső siker hiánya a mi tudományunk körében nem ítélet és a Társulat élénkségének sem meghazudtolója.

Társulatunk czíme két attributumot egyesít; a tanulóversenyeink már csak «a matematikai verseny» nevét viseli és csak nagy ritkán tűz ki fizikai feladatot is. Nem nehéz kitalálni ez intézkedés okát és a ki a kérdésre megfelelt, érteni fogja, miért kisebb a fizikában kutatók száma. A természet, a mely már külső bájával mindenkit oly ellenállhatatlanul magához vonz, ha közelebb férközünk hozzá, szavakban fukarabb, mint saját énünk, a melyből a matematikus merít. Több munkával és főleg több, nem mindenkinek keze ügyébe eső segédeszközzel szolgáltathatjuk csak meg. És mégis, e kedvezőtlenebb külső viszonyok mellett sincs panaszra okunk. A társulati év folyamán néhány külföldi tudományos testületnek és a Magyar Tudományos Akadémiának alkalma volt e téren szemlét tartani és mily eredménynyel, tudott do-

log. Amonnan Bolyainak akkor még álopszerű vágyát is túlszárnyalom, vajha a külföldnek mi is adhatnánk már valamit, az elismerés meleg fénye sugárzott reánk, itthon pedig a Tudományos Akadémia nagyfotosságú optikai törvényre mutathatott reá és oly munkára, melyet ime már mások is igyekeznek továbbfejleszteni és jó sikerrel fejlesztettek is.

De a jelentésemre engedett idő lejár s az év története számokat is kíván.

A XVIII. tanulóverseny 1910 október 8-án tartatott meg. Bár aránylag sok dolgozat akadt, mely dicséretre méltó volt, az első díj még sem volt kiadható; a másodikat Sebestyén Ödön nyerte meg.

Folyóiratunknak XIX. évfolyama 28 ív terjedelemben jelent meg és a szokott rovatokon kívül nyolcz matematikai és ugyanannyi physikai tárgyú értekezést tartalmaz, köztük olyat is, a mely a matematika hazai történetére nézve fontos. Az év folyamán kilencz előadó ülésünk volt, melynek anyaga a két tudománykör között ugyancsak arányosan oszlik meg.

A Társulat az elmúlt év végén 398 tagot számlált, köztük 187 budapesti és 211 vidéki tagot; az előfizetők száma 88. Utolsó jelentésem óta a tagok száma egygyel, az előfizetők 2-vel emelkedett. Igen tisztelt és buzgó pénztárosunk jelentéséből meg fogjuk hallani, hogy anyagi helyzetünk a válságos felé fordul. Ha lehet is reménylenünk, hogy — a mire tizenkilencz év tapasztalata jogosít — tagtársainknak állandósult száma a jövőben is megmarad, még sem várhatjuk tétlenül a jövődőt: a kedvezőtlen életviszonyok szaporítani fogják egyre azon tagok számát, a kik csak névleg azok és félős, hogy a nyomdai költségek folytonos emelkedése is apasztani fogja folyóiratunknak csak néhány évvel ezelőtt kissé szabadabban fejlett terjedelmét. Csak az előfizetők számának jelentős emelkedése segít rajtunk. Huszadik évünkbe léptünk; húsz évi fennállás már biztosítéka életrevalóságunknak és a Társulat szükségszerűségének és talán jogcím és alkalom, hogy a megélhetésünkre okvetlenül szükséges fejlődést vagy támogatást az eddiginél erősebb módon keressük. Nehéz feladat, mely a Választmány bölcseségétől várja megoldását.

A tagok számának a jelentkezés örvendetes emelkedése daczára való állandósága ezúttal a halál munkája, a mely sok derék, még ereje javában lévő munkatárstól fosztott meg. Tudomásunk szerint Hill József, Kados Aladár, Malatin Gothárd, Mórotz Kálmán, Renner János és dr. Schwarz Ottó tagtársaink azok, a kiknek elhunytát gyászoljuk. Emlékük áldva legyen.

A Társulat válságos helyzetében hálával és bizalommal nézünk a

Magyar Tudományos Akadémia felé, megköszönve egyrészt a 2000 korona segélyt, melyvel a III. osztály és annak Matematikai és Természettudományi Bizottsága megmaradásunkat eddig is biztosította, kérve másrészt a jövőben is jóindulatú támogatását, melynek elmaradása legelső életfeltételünk megvonását jelentené.

Igen tisztelt kartársaim és munkatársaink sohasem fukarkodtak, valahányszor szellemi támogatásért hozzájuk fordultam, sőt nem egyszer kérésemet megelőzve voltak segítségemre. Fogadják érte hálás köszönetemet. És ezzel kérem a Tisztelt Közgyűlést, hogy jelentésemet tudomásul venni méltóztassék.

Budapest, 1911 május hó 1-én.

Kövesligethy Radó
ügyvivő titkár.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1911-re és a pénztárvizsgáló bizottság jelentése.

Lévay Ede pénztárnok előterjeszti az alábbi zárszámadást, vagyon-mérleget és költségelőirányzatot, melyeket tételenként megmagyaráz és indokol.

Az ügyvivő titkár felolvassa az 1911 április 30-án kelt, Balog Mór és Bogyó Samu a közgyűlés részéről kiküldött pénztárvizsgálók jelentését, a mely így hangzik: «A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk».

A közgyűlés e jelentéseket meghallgatván, megadja a pénztárnoknak a felmentvényt, neki, valamint a pénztárvizsgálóknak fáradozásukért köszönetet mond és tudomásul veszi a költségelőirányzatot. Elnök a pénztár vizsgálására a közgyűlés részéről újból Balog Mór és Bogyó Samu tagtárs urakat kéri fel.

5. Választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a választmányból kilépnek Beke Manó, Gruber Nándor, br. Harkányi Béla és Réthy Mór választmányi tagok.

Elnök felfüggeszti a választás idejére a közgyűlést és Zemplén Győző elnökle mellett Grosschmid Lajos és König Dénes tagtársakból álló szavazatszedő bizottságot küld ki.

A választás megejtetvén, a bizottság elnöke jelenti az újból megnyitott közgyűlésnek, hogy 37 beadott szavazattal Beke Manó, Gruber Nándor, br. Harkányi és Réthy Mór egyhangúlag újra választmányi tagokul megválasztattak.

1910. évi

BEVÉTEL	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
1909. évi zárszámadási maradvány	2647	08	2647	08
Folyó és köv. évi tagdíjak	2400	—	1388	18
Hátralékos tagdíjak	1200	—	1034	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési díjak	100	—	12	—
Kamatok	550	—	566	50
Előfizetési díjak	700	—	692	—
Vegyesek			20	—
			8359	76

Vagyon-

VAGYON	1909. év végén		1910. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Forgó tőke :				
Készpénz	970	20	194	75
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	1044	08	634	78
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	584	—	732	—
Alaptőke :				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján :				
a) Készpénz	880	—	880	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2262	—	2262	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Tagdíjhátralék	1500	—	2800	—
Föl nem vett hirdetési díj	—	—	100	—
	17497	08	17860	33

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk.

A választmány megbízásából :

Rátz László s. k.

Beke Manó dr. s. k.

Kövesligeth,
ügyviv

1911. évi költség-

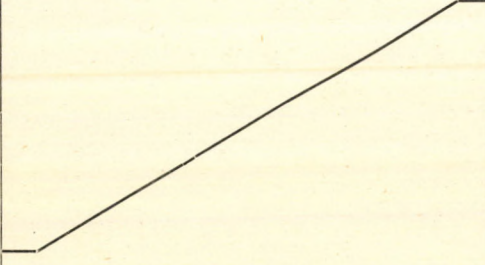
BEVÉTEL	1910. évi		1911. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Zárszámadási maradvány	2647	08	1610	33
Folyó és köv. évi tagdíjak	2400	—	2400	—
Hátralékos tagdíjak	1200	—	1500	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési díjak	100	—	200	—
Kamatok	550	—	550	—
Előfizetési díjak	700	—	700	—
Hiány	1408	41	2087	42
	11005	49	11047	75

zárszámadás.

KIADÁS	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költségek a mult évre	3216	49	3216	49
a folyó évre	3400	—	407	—
Írói tiszteletdíjak a mult évre	829	—	829	—
a folyó évre	2600	—	1491	—
Expeditió- és irodai költségek	800	—	725	—
Középiskolai tanulóverseny	160	—	58	—
Vegyesekre			22	94
Pénztári maradvány a) készpénzben			194	75
b) takarékp. betétben			1415	58
			8359	76

mérleg.

TEHER	1909. év végén		1910. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	3216	49	3722	25
Írói tiszteletdíjak	829	—	787	75
Tiszta vagyon	13451	59	13350	33



Budapesten, 1911. évi április hó 30-án.

adó dr. s. k.
tkár.

A közgyűlés megbízásából :
Bogyó Samu s. k. Balog Mór s. k.

előirányzat.

KIADÁS	1910. évi		1911. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség a mult évre	3216	49	3722	25
a folyó évre	3400	—	3277	75
Írói tiszteletdíjak a mult évre	829	—	787	75
a folyó «	2600	—	2300	—
Expeditió- és irodai költségek	800	—	800	—
Középisk. tanulóverseny	160	—	160	—
Vegyesekre				
	11005	49	11047	75

Dr. Lévy Ede
pénztárnok.

6. Indítványok.

Elnök úr jelenti, hogy az alapszabályoktól követelt határidőn belül indítvány nem érkezett be és hogy ennél fogva a napirend utolsó pontja elesik.

A tárgysor ki lévén merítve, elnök a XVIII. közgyűlést berekeszti.

✱

A közgyűlést rendes előadó ülés követte, melyen Zemplén Győző «a relativitásról», Szűcs Adolf «a variáció-számítás újabb haladásairól» értekezett.

A Matematikai és Physikai Társulat XVIII. tanulóversenye.

A folyó évi szeptember hó 30-án tartott XVIII. tanulóversenyre Budapesten 44, Kolozsvárt 4 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejűleg zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen felvett jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett 4 órai idő alatt Budapesten 20, Kolozsvárt egy dolgozat sem adatott be. A múlt évhez képest a versenyzők száma 7-tel fogyott, a beadott dolgozatok száma 12-vel fogyott.

A kitűzött tételek a következők voltak :

1. Ha a, b, c és A, B, C oly valós számok, hogy

$$aC - 2bB + cA = 0$$

és

$$ac - b^2 > 0,$$

akkor

$$AC - B^2 \leq 0.$$

2. A $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ szabályos nyolczszög köré írt kör kerületén bárhol választván valamely Q pontot, ennek a $P_1P_5, P_2P_6, P_3P_7, P_4P_8$ átlóktól való távolságának negyedik hatványaiból alkotott összeg mindig ugyanakkora.

3. Ha p az 1-nél nagyobb egész szám, akkor $3^p + 1$ nem osztható 2^p -vel.

A versenydolgozatok nyomban a verseny befejezése után lepecsételtettek és előzetes bírálatra Rátz László igazgató úrnak adattak ki. A teljes bíráló bizottság üléséről és határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

A XVIII. matematikai tanulóverseny bíráló bizottságának jelentése.

Jelen vannak : König Gyula elnök, Éber József, Fejér Lipót, König Dénes, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Rados Gusztáv és Rátz László, mint előadó.

Előadó jelenti, hogy a tanulóversenyen Budapesten '44-en, Kolozsvárott 4-en vettek részt. A beadott dolgozatok száma 20.

A bizottság a dolgozatok tüzetes átvizsgálása után a következő javaslattal járul a Math. és Fizikai Társulat választmánya elé:

Az első díjat Hlucsil Károlynak, a zsolnai állami főreáliskolában Erdős Lajos tanítványának, ítéli oda, ki a második és harmadik feladatot hibátlanul oldotta meg és csak az első feladat megoldásában nem emlékezik meg arról a röviden elintézhető esetről, midőn AC negatív.

A második díjat Klein Gábor, a budapesti ág. h. ev. főgimnáziumban Rátz László tanítványa, érdemli meg, ki a második feladatot hibátlanul, az első feladatot egy szintén könnyen elintézhető eset kivételével, jól oldotta meg, de a harmadik tétel bizonyítását csak páros p -re adja.

Dicséretet érdemelnek még Veress Pál, a kolozsvári r. kath. főgimnázium és Janicsék József, a budapesti VIII. ker. községi főreáliskola tanítványai.

Budapest, 1911. évi november hó 3-án.

Éber József
Fejér Lipót
König Gyula,
König Dénes

Kövesligethy Radó
Kürschák József
Rados Gusztáv
Rátz László.

A f. évi november hó 9-én tartott választmányi ülés e jelentést helyeslőleg tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag hozzájárulván, azt határozattá emelte.

★

A választmányi ülést követő rendes ülésen történt a díjak kiosztása. Báró Eötvös Loránd elnök ez alkalommal szívélyesen üdvözölte a nyerteseket és volt tanáraikról sem feledkezett meg.

A Matematikai és Physikai Társulat XVIII. versenyén
b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Hlucsil Károly dolgozata.

1. Ha a, b, c és A, B, C oly valós számok, hogy

$$aC - 2bB + cA = 0 \quad (1)$$

és

$$ac - b^2 > 0 \quad (2)$$

akkor

$$AC - B^2 \leq 0.$$

Az (1)-ből kapjuk

$$\begin{aligned} aC + Ac &= 2bB \\ a^2C^2 + 2acAC + A^2c^2 &= 4b^2B^2 \\ -4acAC &= -4acAC \\ \hline a^2C^2 - 2acAC + A^2c^2 &= 4b^2B^2 - 4acAC \\ (ac - AC)^2 &= 4b^2B^2 - 4acAC \\ (ac - AC)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

tehát

$$4b^2B^2 - 4acAC \geq 0.$$

Ha a baloldali kifejezést -4 osztjuk, akkor a jele megváltozik, vagyis

$$acAC - b^2B^2 \leq 0.$$

De (2)-ből kapjuk, hogy

$$ac > b^2.$$

Ha tehát a kifejezésben ac helyébe b^2 -et helyettesítünk a kifejezés nem nagyobbodhatik, tehát írható, hogy

$$b^2AC - b^2B^2 \leq 0.$$

b^2 feltétlenül pozitív, tehát ha a kifejezést átosztjuk vele ennek jele meg nem változik. Így tehát be van bizonyítva, hogy

$$AC - B^2 \leq 0.$$

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek.

2. A $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ szabályos nyolczszög köré írt kör területén bárhol választván valamely Q pontot, ennek a $\overline{P_1P_5}, \overline{P_2P_6}, \overline{P_3P_7}, \overline{P_4P_8}$ átlóktól való távolságainak negyedik hatványaiból alkotott összeg mindig ugyanakkora.

Helyezzük e szabályos nyolczszöget oly poláris koordináta-rendszerbe, melynek origója összeesik a nyolczszög középpontjával. (Akkor csúcspontjainak koordinátái rendre P és tengelye valamelyik átlójával pl. a $\overline{P_1P_5}$ -tel.) Ily esetben csúcspontjainak koordinátái rendre

$$\begin{aligned} P_1(r, 0), \quad P_2\left(r, \frac{\pi}{4}\right), \quad P_3\left(r, \frac{\pi}{2}\right), \quad P_4\left(r, \frac{3\pi}{4}\right), \quad P_5(r, \pi), \\ P_6\left(r, \frac{5\pi}{4}\right), \quad P_7\left(r, \frac{3\pi}{2}\right), \quad P_8\left(r, \frac{7\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

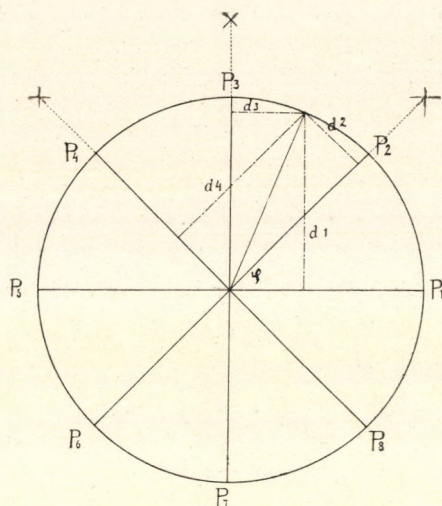
a hol r a szabályos sokszög körülírt körének sugara.

Legyen a Q pont koordinátái r és φ és jelöljük az átlókra bocsátott merőlegeseket rendre d_1, d_2, d_3, d_4 -gyel. Akkor a rajzból látható, hogy

$$\begin{aligned} d_1 &= r \sin \varphi \\ d_2 &= r \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) = r \sin \varphi \cos \frac{\pi}{4} - r \cos \varphi \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= r \sqrt{\frac{1}{2}} (\sin \varphi - \cos \varphi) \\ d_3 &= r \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = r \cos \varphi \\ d_4 &= r \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \varphi \right) = r \sin \frac{3\pi}{4} \cos \varphi - r \cos \frac{3\pi}{4} \sin \varphi = \\ &= r \sqrt{\frac{1}{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi). \end{aligned}$$

A negyedik hatványok rendre

$$\begin{aligned} d_1^4 &= r^4 \sin^4 \varphi \\ d_2^4 &= \frac{r^4}{4} (\sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi)^2 = \frac{r^4}{4} (1 - 2 \sin \varphi \cos \varphi)^2 = \\ &= \frac{r^4}{4} (1 - 4 \sin \varphi \cos \varphi + 4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) = \frac{r^4}{4} - r^4 \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ d_3^4 &= r^4 \cos^4 \varphi \\ d_4^4 &= \frac{r^4}{4} (\sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi)^2 = \frac{r^4}{4} (1 + 2 \sin \varphi \cos \varphi)^2 = \\ &= \frac{r^4}{4} (1 + 4 \sin \varphi \cos \varphi + 4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) = \frac{r^4}{4} + r^4 \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$



A negyedik hatványok összege :

$$\begin{aligned}
 S &= d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 = r^4 \sin^4 \varphi + \frac{r^4}{4} - r^4 \sin \varphi \cos \varphi + \\
 &+ r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + r^4 \cos^4 \varphi + \frac{r^4}{4} + r^4 \sin \varphi \cos \varphi + r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \\
 &= \frac{r^4}{2} + r^4 (\cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi) = \frac{r^4}{2} + r^4 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 = \\
 &= \frac{r^4}{2} + r^4 = \frac{3}{2} r^4.
 \end{aligned}$$

A szóban forgó távolságok negyedik hatványainak összege nem függ a Q ponthoz tartozó φ szögtől, tehát állandó marad, ha a Q pont a kör területén helyét változtatja, így tehát a kör területén bárhol foglalhat helyet. A (kimondott szabály) kapott eredmény tehát a kör összes pontjaira érvényes.

3. A feladatot két részre bontjuk, először az esetben bizonyítjuk be, a mikor a p páratlan és azután azon eszesben, ha p páros egész szám.

Legyen p páratlan.

Akkor a

$$(3^p + 1) : (3 + 1) = A \text{ (páratlan egész szám)}$$

osztás mindég elvégezhető, a hányados pedig oly többtag melynek tagjai páratlan tagjainak száma p tehát szintén páratlan szám, tehát kettővel nem osztható. A $(3^p + 1)$ többtag csak négygyel, az 2^2 -vel osztható,

mivel pedig 1 után az első páratlan szám a három tehát tételünk minden 1-nél nagyobb páratlan számra érvényes.

Legyen p páros, akkor mindig így írható.

$$p = r + 1,$$

a hol r egy páratlan számot jelent.

Ez esetben

$$3^p + 1 = 3^{r+1} + 1 = 3 \cdot 3^r + 1 = 2 \cdot 3^r + 3^r + 1.$$

De $3^r + 1$ -ről bebizonyítottuk, hogy 4-gyel osztható. tehát írhatjuk, hogy

$$3^r + 1 = 4A.$$

Ezt behelyettesítve lesz:

$$3^p + 1 = 2 \cdot 3^r + 4A = 2(3^r + 2A).$$

De

$$3^r + 2A$$

páratlan szám tehát $3^p + 1$ az esetben, ha p páros, csak 2^1 -vel osztható, így tehát tételünk az összes páros számokra érvényes.

II. Klein Gábor dolgozata.

I.

$$aC - 2b \cdot B + cA = 0$$

miből

$$B = \frac{aC + cA}{2b} \dots \quad (1^0)$$

Tegyük fel, hogy

$$AC - B^2 > 0$$

vagyis, hogy

$$B^2 < AC$$

1^o-ból

$$B^2 = \frac{a^2C^2 + c^2A^2 + 2acAC}{4b^2},$$

tehát

$$\frac{a^2C^2 + c^2A^2 + 2acAC}{4b^2} < AC$$

$4b^2 > 0$, ha b valós, tehát az egyenlőtlenség igaz marad, ha $4b^2$ -vel szorozzuk mindkét oldalát

$$a^2C^2 + c^2A^2 + 2acAC < 4b^2AC \dots \quad (2^0)$$

Feladatunk szerint

$$ac - b^2 > 0,$$

tehát

$$ac > b^2$$

és így 2^0 egyenlőtlenségünk jobb oldalán b^2 helyébe ac -t téve, a 2^0 egyenlőtlenség igaz marad

$$a^2C^2 + c^2A^2 + 2acAC < 4acAC$$

$$a^2C^2 + c^2A^2 < 2acAC$$

$$a^2C^2 + c^2A^2 - 2acAC < 0.$$

A baloldalon álló kifejezés

$$a^2C^2 + c^2A^2 - 2acAC = (aC - cA)^2$$

tehát arra jutottunk, hogy

$$(aC - cA)^2 < 0,$$

a mi a , c , C és A valós értékei mellett abszurdum.

Helyes következtetés mellett abszurd eredményre jutottunk, tehát fel-tételünk:

$$AC - B^2 > 0$$

helytelen és így

$$AC - B^2 \leq 0.$$

II.

Legyenek P_1P_5 és P_3P_7 egy derékszögű koordinata rendszer tengelyei.

Akkor Q távolsága P_1P_5 -től a Q pont abszcisszája: p és a Q távol-sága P_3P_7 -től a Q pont ordinatája: q .

Kiszámítjuk a Q pont távolságát P_2P_6 -tól: t_1 -et és Q távolságát P_4P_8 -tól: t_2 -öt.

A P_2P_6 egyenes egyenlete

$$y = x \dots \quad (1^0)$$

Egy erre merőleges egyenlete

$$y = -x + b \dots \quad (2^0)$$

Hogy a (2^0) egyenes keresztül menjen a Q ponton, szükséges, hogy

$$q = -p + b,$$

vagyis, hogy

$$b = q + p.$$

A Q -ból P_2P_6 -ra bocsájtott merőleges egyenlete:

$$y = -x + (q + p).$$

Kiszámítjuk ennek és a P_2P_6 metszéspontjának koordinátáit

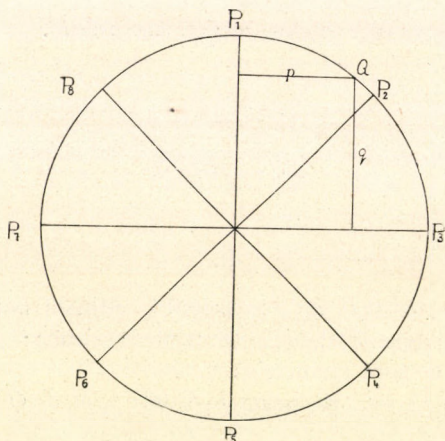
$$\left. \begin{array}{l} y = -x + (q+p) \\ y = x \end{array} \right\}$$

miből

$$y = x = \frac{1}{2} (q+p).$$

A metszéspont és a Q pont távolsága = Q pont távolsága a P_2P_6 egyenestől

$$t_1 = \sqrt{\left(p - \frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p+q}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(p-q)^2} = \frac{1}{2} (p-q) \sqrt{2}.$$



Hasonlóképen kiszámítva

$$t_2 = \frac{1}{2} (p+q) \sqrt{2}.$$

A teljes hatványösszeg tehát

$$\begin{aligned} p^4 + q^4 + \left(\frac{1}{2}[p-q]^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}[p+q]^2\right)^2 = \\ = p^4 + q^4 + \frac{1}{4}[(p^2+q^2-2pq)^2 + (p^2+q^2+2pq)^2] \dots \quad (1) \end{aligned}$$

de

$$p^2 + q^2 = r^2,$$

a hol r a kör sugara, tehát

$$\begin{aligned}
 &= p^4 + q^4 + \frac{1}{4} [(p^2 - 2pq)^2 + (p^2 + 2pq)^2] = \\
 &= (p^4 + q^4 + 2p^2q^2) + \frac{1}{2} p^2 = (p^2 + q^2)^2 + \frac{1}{2} p^2 = \\
 &= p^2 + \frac{1}{2} p^2 = \frac{3}{2} p^2 = \text{constans. (sic!)}
 \end{aligned}$$

III.

$$(3^p + 1) = (2 + 1)^p + 1 = 2A + \binom{p}{p-1} 2 + 1 + 1 = 2 [A + (p + 1)],$$

a hol A osztható 2-vel, mert, a binomi tételben utolsó tagja $\binom{p}{p-2} 2$.

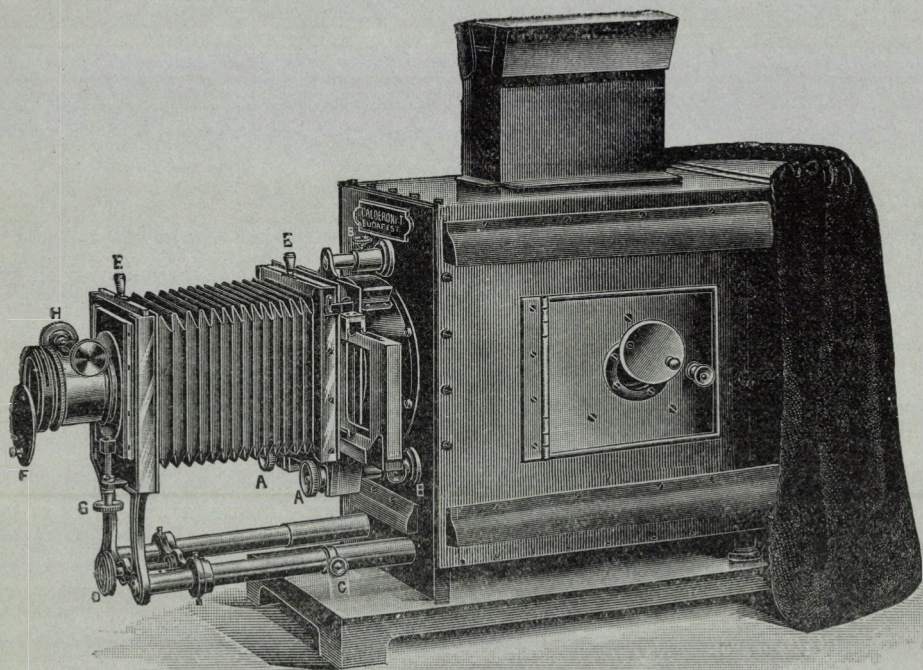
Ha tehát p páros, akkor $3^p + 1$ csak 2^1 -vel osztható.



Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetítőkészülékeit.



Vetítőkészülék «Calderoni B»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségű aczélemezekből van készítve, eternit-béléssel és kitűnő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágítólenesével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektív-foglalattal, egy ebbe illő kitűnő vetítési objektívvel, a finom beállítás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős kép-váltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kívül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel borított nyíláson át távozik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készítve. — A bronzból készített objektívet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönnyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül*

K 260.—

Vetítőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágító lencsék közé van iglatva. — Ezen felszerelés vetítő készülékünket a legtokéletebb ilyenmű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K 350.—

A vetítőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektív foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyújtávolságu vetítési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyújtávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetítési objektív tartozik. — Minden további objektív ára darabonként K 24.—

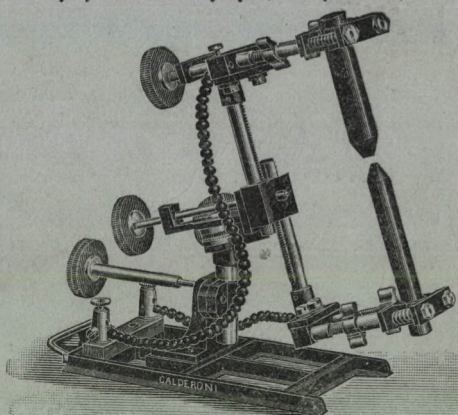
Vetítőkészülékeink a merőleges és vízszintes síkban végbemenő vetítésre, valamint mikroszkopikus vetítésre is, úgy szintén szinképek, interferenciális tűnemények, fényelhajlási, fénycsarkítási és kettős törési kísérletek stb. vetítésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, míg az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kívánatra szívesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetítőkészülékeinket — melyek a legtokéletebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénnyel, mészfénnyel, acetylénnel, borszesz-izzófénnyel stb. szállítjuk.

Elektromos ívlámpa

legjobb minőségű és felette erős szerkezetű (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segítségével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségű egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K 120.—

Elektromos ívlámpa

egyszerűbb és könnyebb szerkezetű. Ára K 90.—



Borszesz-izzófénnyel légsűrítővel ellátva, mely 300 gyertya-fény erejű világítást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K 50.—

Háromlábú asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segítségével magasabbra és mélyebbre állítható, felső lapja pedig a vetítőkészülék által esetleg megkívánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K 110.—

Vetítési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyűrűkkel ellátva. Ára K 8.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K 30.—

Vetítési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legcélszerűbben a falra erősítendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősíthetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	45.—	65.—	90.—	145.—	200.—	240.— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetítőkészülékeinkről munkában van.

